高等学校试用教材

一般拓扑学导引

人民教育出版社

高等学校试用教材

一般拓扑学导引

李孝传　陈玉清

人民教育出版社

本书是作者参照高等学校理科数学、力学、天文学教材编审委员会于1980年审订的高等师范院校《拓扑学教学大纲》编写的. 内容为拓扑空间、连通性、分离公理与可数性公理、紧致性、正则性与正规性、度量化定理等五章，外加集合论提要作为预篇，且各章配有习题，便于使用.

本书由刘应明教授任主审，经理科数学教材编委会委托蒲保明编委任复审，同意作为高等师范院校教材出版.

本书论述了一般拓扑学的基本内容，取材适当，叙述论证较为清晰，概念引入比较自然，注意到由具体到抽象再回到具体，习题配备难易适度，也可作为综合大学数学系的教材或参考书.

责任编辑　丁鹤龄

高等学校试用教材

一般拓扑学导引

李孝传　陈玉清

*

人民教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

上海商务印刷厂印装

*

开本850×1168 1/32　印张8.625　字数205,000

1982年12月第1版　1983年5月第1次印刷

印数 00,001—13,800

书号13012·0794　　定价1.15元

前　言

一般拓扑学也叫做点集拓扑学，它在现代数学的许多分支中、特别是在现代分析学中得到了大量的应用，不但如此，它在数学的邻近学科中也不乏应用．因此，它对于现代数学及其邻近学科、乃至工程技术科学的学习与研究方面，其重要性已无容置疑了．可是，关于拓扑学方面的书籍在国内目前已出版的不多，这与中国这样一个土地广大、人口众多的国家是很不相称的，更不用说这种情况如何能满足科学技术现代化的需要了．有鉴于此，我们决心合作写出这本书来以作为引玉之砖．

本书是根据我们关于这门课程的原有讲稿、结合祖国当前的实际、并参照祖国1980年理科数学编委会审订的高等师范院校《拓扑学教学大纲》改写而成的．它可以作为高等师范院校或综合性大学数学系的教材与教学参考书之用．

为了减少教学方面的困难并能引起初学者的兴趣起见，我们写作时采用了由具体到抽象再回到具体，或者说得更确切一些，由特殊到一般再回到特殊的方法：以欧氏空间为模型引入度量空间，进而引入拓扑空间，并从第一章开始，各章都以这一章的一般理论在欧氏空间中的应用来结束，或者以与本章所论拓扑性质有关的度量性质来结束．这样，度量空间的理论将不设专章讨论，而分散于各章．

本书内容如书名所示，以引导初学"点集拓扑学"者入门为目的，因此取材不侧重全面与现代化，而只求为这门学科的进一步学习与研究奠定基础．根据我们各自在中国与美国的教学经验，我

们相信，本书的内容已经足以达到这个目的.

本书的内容也许可以说已经足够精简了；但如果在实际教学中，由于各种原因需要对本书内容作进一步的精简，则以下的删节是可以参考的：预篇可以不讲，或只介绍以后各章所需要用到的记号和术语；凡节数、款数、例数右肩附有星号的可以不讲；定理下面"证"字右肩或证明的"明"字右肩附加星号的，表示定理应该讲，但它的证明可以不讲，或者表示定理及其第一个证明应该讲，第二个证明可以不讲. 第一章第六节的款5*虽然可以略去，但由于商空间是一个比较重要的概念，我们建议最好还是介绍一下这个概念及例子，以下的几个定理则可以酌情不讲. 又如果删去第五章的第四节*，则显然下一节的定理(5.8)、(5.9)与(5.10)中的 T_3 必须用 T_4 来代替. 总之，本书作为教科书，可以灵活处理：部分内容既可以删节，也可以不删节，甚至可以补充；若是删节也可以多于上面提到的范围，但应注意不影响后继教材的讲授.

每章末尾都有习题. 一般说来，习题并不难；而具有一定难度的，习题号数右肩则注有星号，初学者可以不做. 在某些习题中我们引入了正文中所未引入的一些概念，并列出了与之相关的一些定理，其中某些定理的证明无疑是困难的，但容易在某些文献中查出. 这样的一些习题，可以看作是对正文的补充.

顺便说明一下本书所采用的几个记号：我们仿效江泽涵教授在他的《拓扑学引论》一书中那样，用记号"∎"表示"证明完毕". 在援引同一章的定理、命题或定义时，将直接写出它们在这一章里的番号. 但如果，比如说，在第二章以后的某一章援引第二章的定理(4.2)和定义(1.1)时，则将它们分别写成定理(2.4.2)和定义(2.1.1)；定义(0.6.8)则表示预篇第六节的定义(6.8)；又例(三)2及习题(二)VI*,1分别表示第三章的例2及第二章的习题VI*,

1；依此类推.

还应该说明的是，本书的写作是在西南师范学院数学系教授李孝传的主持下，由他执笔写成并修订的. 本书的内容和习题的绝大多数取自他的原有讲稿. 而这些内容中有很大一部分则又取材于C. Chevalley于1945年为美国普林斯顿(Princeton)大学数学专业研究生和数学系本科生合开的《一般拓扑学》和他在1946年为数学专业研究生所开设的《实变函数论》，以及R. H. Fox于1946年在该大学为数学专业研究生所开设《点集拓扑学》，且为李孝传所作的课堂讲授笔记. 不过这些内容几经后者组织、整理、删节和增补，已失去原样. 特别是写作本书时，改动更大；其中许多内容与他自己的工作也是分不开的；例如，预篇中关于笛卡尔积的部分积的命名和记号、关于分支函数的命名、关于康托尔集性质的评论、关于度量凸性的命名和有关性质及其应用、以及第四章和第五章习题中的公理E_δ和公理B_σ及其推论等等. 美国福德姆(Fordham)大学数学系副教授陈玉清博士，于1978—1979年在北京师范大学讲学期间首先倡议由李孝传主持与他合写此书，从而对本书的写成起了促进作用. 在拟订写作提纲和讨论本书初稿时，陈玉清博士提出了有益的意见，并且在本书中也采用了他在北京师范大学讲学时所用的一些记号、术语、教材内容和习题；例如命题(0.2.1)、(0.4.12)、(2.4.7)、预篇第四节中关于有序偶的N. Wiener的定义、第一章的例14等等. 又李孝传在执笔时对陈玉清的讲学内容也略有发展；例如，系(3.2.6)原为他讲学内容的一个定理，经前者推广而得到定理(3.2.5).

最后，我们对北京师范大学和西南师范学院领导所给予我们的支持和关怀，对北京大学数学系江泽涵教授所给予我们的鼓励，对北京师范大学数学系以系主任张禾瑞教授为首的老师们、特别是四川大学数学系刘应明教授对本书所提的宝贵意见和建议，以

及西南师范学院数学系刘建军同志对本书索引的编写，我们在此一并致以衷心的感谢．又本书的缺点和错误在所难免，切望读者斧正。

李孝传　陈玉清

1980年12月

目　　录

预篇 集合论提要

集合论的初步知识假定读者业已具备. 下面我们只引进为以后各章所需要的记号、定义与基本定理, 而且一般不给予定理以证明.

一、记 号

令 p 与 q 表示任意两个命题.

1) $p\wedge q$ 表示 p 与 q 或既 p 且 q.

2) $p\vee q$ 表示 p 或 q, 但不排斥 p 与 q; 也就是说, 这里的"或"是"或此或彼或两者"的"或".

3) $\sim\cdot p$ 表示 p 的否定, 即非 p.

4) $p\Rightarrow q$ 表示 p 蕴涵 q; 也就是说, 如果 p 则必 q.

5) $p\Leftrightarrow q$ 表示 p 与 q(逻辑地)等价; 这就是说, p 当且仅当 q; 或 p 以 q 为充要条件; 或者换句话说, p 与 q 同时为真或同时为假; 也就是说,

$$(p\Rightarrow q)\wedge(q\Rightarrow p).$$

例如, "$(p\Rightarrow q)\Leftrightarrow(\sim\cdot q\Rightarrow\sim\cdot p)$"的意义就是"命题 $p\Rightarrow q$ 与其逆否命题 $\sim\cdot q\Rightarrow\sim\cdot p$ 等价".

6) $\exists x$ 表示存在一个 x; 这就是说, 至少有一个 x.

7) $\exists! x$[①]表示存在唯一的一个 x.

---

① 参看 L. M. Graves, The Theory of Functions of Real Variables, 2nd edition (p. 12), McGraw-Hill Book Comp., Inc., New York 1956. 也有用 $\exists!$ 表示"存在且唯一"的.

8) $\ni\cdot$或者 s.t. 表示使得或能使.

9) $\forall x$ 表示对于所有或对于每一个 x. 例如，令 x 与 y 表示实数. 那末，命题

$$p: \qquad \forall x>0\,\exists y\ni\cdot 0<y\wedge y<x$$

的意义就是："对于所有的正数 x 都至少有一个正数 $y<x$." 鉴于实数系的稠密性，这个命题显然是真的. 命题 p 的否定是

$$\sim\cdot p: \qquad \exists x>0\ni\cdot\forall y(0\geqslant y\vee y\geqslant x),$$

意即，"至少有一个正数 x，使得对于所有的 y，或者 y 不为正数，或者 y 不小于 x"；换句话说，"至少有一个正数 x，使得每一个正数 y 都不小于 x". 这个命题当然不真.

应该观察到，在这两个互相否定的命题 p 及 $\sim\cdot p$ 中，记号 $\forall$ 与 $\exists$ 互相交换，又记号 $\wedge$ 与 $\vee$ 也互相交换，自然还有其他互相否定的改变. 而这正是否定一个命题的一般规律.

二、集合·区间

集合论是现代理论数学各分支的共同基础，它给予了后者一种共同的语言. 因此《拓扑学》不能例外，也建立在这一基础之上，利用着这一共同的语言.

1. 集合 集合是数学中的一个很基本的概念，对它作深入的分析是数学基础的任务. 我们现在满足于对它进行适当的描述. 这样的描述也可以称为描述性定义.

任何具体的或抽象的事物(讨论的对象)，集多为一，把它们看作一个整体时，这个整体就叫做一个集合. 例如，某处的"一堆石块"的"堆"，某一牧场上的"一群牛"的"群"，以及实数的"全体"，拉丁字母的"全体"，都是各式各样的集合. 集合也简称为集.

组成一个集合的每一个对象叫做这个集合的一个元素．例如“银河系”就是一个集合，其中的每个星体都是银河系这个集合的元素．

集合也可以看成是由一个特性(property)或条件 $p(x)$ 所决定．特性 $p(x)$ 必须是这样：一个对象 x 具有或不具有特性(满足或不满足条件) $p(x)$，二者必居其一，且只居其一．于是一切具有特性 $p(x)$ 的对象 x 就组成一个集合 A，称为由特性 $p(x)$ 所决定；而每个具有特性 $p(x)$ 的对象都是 A 的元素，否则就不是[1]．为了表示集合 A 由特性 $p(x)$ 所决定，我们使用记号

$$A=\{x|p(x)\}.$$

为了表示 x 是集合 A 的元素，我们写成：

$$x\in A \quad 或 \quad A\ni x,$$

读作“x 属于 A”、“x 在 A 中”、“x 包含于 A”或“A 包含 x”．记号 $x\notin A$ 或 $A\not\ni x$ 表示“x 不属于 A”，即 $x\in A$ 的否定[2]．

例 1 令特性 $p(x)$ 表示“x 是一个自然数”，并令

$$\mathbb{N}=\{x|x 是一个自然数\},$$

则 $\mathbb{N}$ 为一切自然数所成的集合，称为自然数系．令

$$\mathbb{Z}=\{x|x 是一个整数\},$$

则 $\mathbb{Z}$ 为一切整数所成的集合，称为整数系．

空集将用记号 $\emptyset$ 表示，其定义如下：

$$\emptyset=\{x|x\neq x\}.$$

其实，空集可用任何特性 $p(x)$ 来定义，只要它不为任何对象 x 所具有．例如，令 x 表示实数；则

---

① x 应该限制在一个已被承认的集合内取值，否则可能产生悖论．例如，若令特性 $p(x)$ 表示“x 是一个集合”，则 $p(x)$ 所决定的就是一切集合组成的“集合”，因为任何特定的集合 x 都满足条件 $p(x)$．但如下文(2.1)所示，它不能是一个集合，从而导致了矛盾．

② $x\notin A$ 也被写成 $x\bar{\in} A$ 或 $x\in' A$，但我们宁愿使用前者．

$$\emptyset=\{x \mid x>7 \wedge x<6\}. \tag{1}$$

空集只有一个，它不包含任何元素.

令 $\mathbb{R}$ 表示所有实数组成的集合，即实数系. 我们看出，(1)式中的 x 在 $\mathbb{R}$ 中取值. 一般说来，设 A 为任一给定的集合，$p(x)$ 为一给定的条件. 若集合 B 由满足条件 $p(x)$ 的 A 中一切元素 x 所组成，则写成：

$$B=\{x \in A \mid p(x)\}.$$

例 2 令 $\mathbb{E}=\{x \in \mathbb{Z} \mid \exists n \in \mathbb{Z} \ni \cdot x=2n\}$，则 $\mathbb{E}$ 表示一切偶数组成的集合，即偶数系.

我们以后分别用记号 $\mathbb{N}$、$\mathbb{Z}$、$\mathbb{Q}$、$\mathbb{R}$、$\mathbb{C}$ 去表示自然数系、整数系、有理数系、实数系及复数系.

一个集合的元素本身也可以是其他对象组成的集合. 例如，银河系由星体所组成，而银河系的每个元素，即星体，又可以看成是由构成它的一切原子所组成的集合. 如果一个集合的元素是集合，那末，这个集合的元素的元素也仍然可以是集合，依此类推. 然而“包罗一切的集合”或“由一切集合组成的集合”并不存在. 事实上，我们有下面的命题.

(2.1) $\forall$ 集合 A，$\exists$ 集合 $B \ni \cdot B \notin A$.

证 令 $$B=\{x \in A \mid x \notin x\}.$$

假定 $B \in A$. 那末，下面的两种情形必定有一种，而且也只有一种发生.

1) $B \in B$. 在这一情形下，必然有 $B \in A \wedge B \notin B$. 这是一个矛盾.

2) $B \notin B$. 在这一情形下，由于 $B \in A$，因而有 $B \in B$. 这又是一个矛盾.

由此可见，决不能有 $B \in A$，也就是说，必然有 $B \notin A$. ∎

当 A 是所谓“所有集合组成的集合”时，命题(2.1)证明中的

论述就是罗素悖论. 因此这个命题证明中的论述[①]应该说是著名的罗素悖论的推广，现在也被称为罗素悖论，由(2.1)立即看出：

(2.2) 不存在所有集合组成的集合以及包罗一切的集合.

满足条件“$A\in A$”的所有所谓的“集合”A我们也从集合论中把它们排除掉.

前面提到的“整体”、“全体”和“系”其实都是集合的同义词. “总体”及“类”也是集合的同义词[②].

如果一个集合由对象a、b、c、…所组成，则这个集合可以写成

$$\{a, b, c, \cdots\}.$$

例如，自然数系$\mathbb{N}$可以写成

$$\{1, 2, 3, \cdots, n, \cdots\};$$

偶数系$\mathbb{E}$可以写成

$$\{0, \pm 2, \pm 4, \cdots, \pm 2n, \cdots\};$$

自然数列的前面n个数所成的集合可以写成

$$\{1, 2, 3, \cdots, n\}.$$

由一个对象a单独组成的集合$\{a\}$叫做**单元集**，它也可以用$\{x|p(x)\}$的形式定义如下：

$$\{a\}=\{x|x=a\}.$$

二元集$\{a, b\}$也叫做**无序偶**，可定义如下[③]：

$$\{a, b\}=\{x|x=a\vee x=b\}.$$

单元集$\{a\}$在概念上与它的唯一元素a并不是一回事. 例如，令$a=\{1, 2, 3\}$；则集合a由三个元素1、2、3所组成，但$\{a\}$只有唯一

---

① 参阅 P. R. Halmos, Naive Set Theory, p. 7.

② 在《范畴论》中有将“集合”与“类”加以区别的必要. 粗略地说来，凡“集合”都是“类”，但“类”则不一定是“集合”，并承认“所有集合组成的类”. 不过有的数学家也怀疑这种非集合的“类”的存在. 于此，我们不予深究. 由于在本书范围内无必要引用这种非集合的“类”，我们倒不如把它看成“集合”的同义词.

③ 当$a=b$时，$\{a, b\}=\{a\}$.

的一个元素 a，可见 $\{a\}$ 与 a 不同.

一个集合与组成它的元素之间的次序无关．例如，集合

$$\{1, 2, 3\}、\{2, 3, 1\}、\{3, 2, 1\}$$

等等都是同一个集合．二元集之所以称为无序偶，其原因也就在这里．又一个集合的任何两个不同的元素不能当成同一个元素看待；一个元素也决不能看成两个或两个以上的元素．例如，在一个空间笛卡尔坐标系中，点 $(1, 1, 1)$ 的三个坐标组成的集合只能是单元集 $\{1\}$。

习惯上，我们常用大写的拉丁字母 A、B、C、…去表示集合，用小写的拉丁字母 a、b、c、…去表示集合的元素，但也不排斥其他的记号法.

2．区间　设 $a, b\in\mathbb{R}, a<b$．令

$$[a, b]=\{x\in\mathbb{R}\,|\,a\leqslant x\leqslant b\},\ ]a, b[=\{x\in\mathbb{R}\,|\,a<x<b\},$$

则集合 $[a, b]$ 与 $]a, b[$ 分别称为以 a、b 为端点的**闭区间**与**开区间**①.

令　$[a, b[\ =\{x\in\mathbb{R}\,|\,a\leqslant x<b\},\ ]a, b]=\{x\in\mathbb{R}\,|\,a<x\leqslant b\}$，则集合 $[a, b[$ 及 $]a, b]$ 都叫做以 a、b 为端点的**半开区间**或**半闭区间**.

以 a、b 为端点的开、闭和半开区间统称为**有限区间**或**有界区间**．a 叫做有限区间的**左端点**或**下端点**，b 叫做**右端点**或**上端点**．正数 $b-a$ 叫做有限区间的**长度**，或简称为**长**.

令　$[a, +\infty[\ =\{x\in\mathbb{R}\,|\,x\geqslant a\},\ ]-\infty, b]=\{x\in\mathbb{R}\,|\,x\leqslant b\}$，它们分别叫做以 a 或 b 为端点的**无穷闭区间**．令

$$]a, +\infty[\ =\{x\in\mathbb{R}\,|\,x>a\},\ ]-\infty, b[\ =\{x\in\mathbb{R}\,|\,x<b\},$$

① 为了避免与后文引入的“有序偶”的记号相混淆，在这里我们采用布巴基(N. Bourbaki)关于区间的记号法.

它们分别叫做以 a 或 b 为端点的无穷开区间. 实数系 $\mathbb{R}$ 可以用记号 $]-\infty, +\infty[$ 来表示:

$$\mathbb{R}=]-\infty, +\infty[,$$

它也是一个无穷区间,不过它既可以说是开的又可以说是闭的.所有的无穷开区间与无穷闭区间统称为无穷区间.

所有的有限区间与无穷区间统称为区间.

当 $a=b$ 时, 记号 $]a, b[$ 、$[a, b[$ 与 $]a, b]$ 都代表空集,它也是一个有限区间, 而且与 $]-\infty, +\infty[$ 一样也定义为既开且闭的. 记号 $[a, a]$ 代表单元集 $\{a\}$,这是一个有限闭区间. 所有这些都是退化区间,它们的长度为零.

三、集合的运算

1. 子集·集合的相等 某一问题所讨论的一切对象构成一个全域或全集 $\mathscr{U}$. 全域的选择是随着问题性质的不同而变化的, 它必须是一个非空集合. 例如,在讨论平面几何的问题时,一个固定的平面, 作为点的集合, 就是我们的全域; 在讨论球面几何的问题时, 全域就变成为一个固定的球面. 下面我们将任意选定一个全域 $\mathscr{U}$,而所涉及的对象都取之于 $\mathscr{U}$.

(3.1) **定义** 设 A 与 B 表示两个随意的集合. 如果

$$x\in A \Rightarrow x\in B,$$

即 $\forall x\in A$ 都有 $x\in B$,则称 A 是 B 的一个子集,记作

$$A\subset B \quad 或 \quad B\supset A,$$

读成: “A 包含于 B” 或 “B 包含 A”. 记号 $A\not\subset B$ 或 $B\not\supset A$, 表示 $A\subset B$ 的否定,即表示 A 不是 B 的子集; 读作: “A 不包含于 B”,或 “B 不包含 A”.

由定义(3.1)立即看出, 任何集合 A 都是全域 $\mathscr{U}$ 的子集;

$\forall A,\ A\subset\mathscr{U}$. 又 $A\not\subset B\Leftrightarrow\exists x\in A\ni\cdot x\notin B$; $A\subset B\Leftrightarrow(x\notin B\Rightarrow x\notin A)$.

(3.2) $\forall A,\ \emptyset\subset A$.

事实上，我们有 $x\notin A\Rightarrow x\notin\emptyset$，因为空集不含任何元素. ▌

设 A、B、C 为任意的集合，显而易见：

(3.3) 1° $A\subset A$（自反性）；

2° $A\subset B\wedge B\subset C\Rightarrow A\subset C$（传递性）.

我们已经看出，$A\subset B$ 并不排斥 $B\subset A$.

两个集合 A 与 B **相等**：$A=B$，当而且只当它们由同样的元素所组成时. 显然，$A=B\Leftrightarrow A\subset B\wedge B\subset A$，因为这时它们所包含的元素完全相同. 记号 $A\neq B$ 表示 $\sim\cdot A=B$，即 A 不等于 B.

如果 $A\subset B\wedge A\neq B$，则称 A 是 B 的**真子集**.

显而易见：

(3.4) 1° $A=A$（自反性）；

2° $A=B\Rightarrow B=A$（对称性）；

3° $A=B\wedge B=C\Rightarrow A=C$（传递性）.

(3.5) **定义** $\mathscr{P}(A)=\{B\mid B\subset A\}$ 叫做集合 A 的幂集. 换句话说，集合 A 的幂集 $\mathscr{P}(A)$ 由 A 的一切子集所组成.

例 3 如果 $A=\emptyset$，则 $\mathscr{P}(\emptyset)=\{\emptyset\}$. $\{\emptyset\}$ 是单元集，它的唯一元素是空集 $\emptyset$. 因此，$\{\emptyset\}\neq\emptyset$. 这再一次说明不能将 $\{a\}$ 与 a 混同. 如果 $A=\{1,2\}$，则 $\mathscr{P}(A)=\{\emptyset,\{1\},\{2\},A\}$，它有 $2^2=4$ 个元素. 一般说来，如果 A 有 n 个元素（$n\in\mathbb{N}$），则 $\mathscr{P}(A)$ 的元素个数为 2^n. 这是因为，$\mathscr{P}(A)$ 的所有元素中有 1 个空集，C_n^1 个单元集，C_n^2 个二元集，如此等等. 所以 $\mathscr{P}(A)$ 的元素个数是

$$1+C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^n=(1+1)^n=2^n.$$

2. 并集与交集 设 $A\subset\mathscr{U}$，$B\subset\mathscr{U}$. 我们定义 A、B 的并集与交集如下：

(3.6) **定义** 令

$$A\cup B=\{x\in \mathscr{U} \mid x\in A\vee x\in B\},$$
$$A\cap B=\{x\in \mathscr{U} \mid x\in A\wedge x\in B\};$$

则 $A\cup B$ 与 $A\cap B$ 分别称为 A 与 B 的**并集**与**交集**①.

集合 A 与 B 的并集与交集也分别简称为 A 与 B 的**并**与**交**.

例 4 令 $A=\{a, b, c, d\}$, $B=\{c, d, e\}$; 则

$$A\cup B=\{a, b, c, d, e\},\ A\cap B=\{c, d\}.$$

当 $A\cap B\neq\emptyset$ 时, 则 A 与 B 称为**相交**; 而当 $A\cap B=\emptyset$ 时, 则 A 与 B 称为**不相交**或**互相分离**.

设 $A\in\mathscr{P}(\mathscr{U})$, $B\in\mathscr{P}(\mathscr{U})$, $C\in\mathscr{P}(\mathscr{U})$. 下面各命题的真实性是完全明显的.

(3.7) $A\cup A=A$; $A\cap A=A$; $\emptyset\cup A=A$; $\emptyset\cap A=\emptyset$.

(3.8) $A\cup B=B\cup A$; $A\cap B=B\cap A$. (交换律)

(3.9) $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$; $(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$. (结合律)

(3.10) $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$;
$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$. (分配律)

3. 差集与余集 令 $A\in\mathscr{P}(\mathscr{U})$, $B\in\mathscr{P}(\mathscr{U})$. 我们去定义差集与余集.

(3.11) **定义** 令

$$A-B=\{x \mid x\in A\wedge x\notin B\};$$

则集合 $A-B$ 称为集合 A 与 B 的**差集**. 如果 $A\supset B$, 则 $A-B$ 称为集合 B 关于集合 A 的**余集**, 或者称为 B 在 A 中的**余集**, 并且用记号 $\mathscr{C}_A B$ 来表示:

① 建议讲授并、交、差、余等运算时, 教师可用文氏图解(Venn diagram)或其他图示法作直观的解释.

$$\mathscr{C}_A B = A - B \qquad (A \supset B).$$

任何集合 A 关于全集 $\mathscr{U}$ 的余集将简称为 A 的**余集**，并且用记号 $\mathscr{C}A$ 来表示：

$$\mathscr{C}A = \mathscr{U} - A = \{x \mid x \notin A\}.$$

由此可见

$$A - B \subset A;\ A \subset (A-B) \cup B;\ A - \emptyset = A;$$
$$(A-B) \cup B = A \Leftrightarrow B \subset A;\ A - B = \emptyset \Leftrightarrow A \subset B;$$

特别地，$A - A = \emptyset$.

以下各命题的真实性是明显的.

(3.12) 当 $B \supset A$ 时，$\mathscr{C}_B(\mathscr{C}_B A) = A$. 特别地，当 $B = \mathscr{U}$ 时，$\mathscr{C}(\mathscr{C}A) = A$.

(3.13) $\mathscr{C}\emptyset = \mathscr{U},\ \mathscr{C}\mathscr{U} = \emptyset;\ A \cap \mathscr{C}A = \emptyset,\ A \cup \mathscr{C}A = \mathscr{U}$.

(3.14) $A \subset B \Leftrightarrow \mathscr{C}B \subset \mathscr{C}A;\ A = B \Leftrightarrow \mathscr{C}A = \mathscr{C}B$.

(3.15) $A - B = A \cap \mathscr{C}B$.

(3.16) 笛·摩尔根(De Morgan)定律

$$\mathscr{C}(A \cup B) = \mathscr{C}A \cap \mathscr{C}B,\ \mathscr{C}(A \cap B) = \mathscr{C}A \cup \mathscr{C}B.$$

四、二元关系及函数

本节所论可以完全建立在集合这一基本概念的基础之上，但为了减少读者的困难，我们仍然不时借助于直观.

1. 二元关系 为了定义“二元关系”，我们应该先定义“有序偶”. 两个对象 a、b 所成的有序偶可以定义为无序偶[①] $\{\{a\}, \{a, b\}\}$，并记作 (a, b)：

① 参阅 P. R. Halmos, Naive Set Theory; 或 J. L. Kelly, General Topology, 附录.

$$(a, b)=\{\{a\}, \{a, b\}\},$$

其中 a 称为有序偶 (a, b) 的第一坐标，b 称为第二坐标.

应该指出的是，有序偶 (a, b) 不是 a、b 两个对象所成的集合，而是单元集 $\{a\}$ 与无序偶 $\{a, b\}$ 组成的集合. 当 $a=b$ 时，$(a, b)=\{\{a\}\}$，而不是 $\{a\}$.

例 5 在平面上选定笛卡尔 (Descartes) 坐标系后，平面上每一点的坐标都是实数的一个有序偶，而坐标 (a, b) 与 (c, d) 表示同一点，当而且仅当 $a=c$, $b=d$ 时，即

$$(a, b)=(c, d) \Leftrightarrow a=c \wedge b=d. \tag{2}$$

众所周知，复数 $a+bi$ 也可以看成是实数的有序偶 (a, b)，而且

$$a+bi=c+di \Leftrightarrow a=c \wedge b=d.$$

关系式(2)对于任意对象所成的有序偶 (a, b) 与 (c, d) 都是真实的.

(4.1) 设 a、b、c、d 表示任意的对象. 那末，

$$(a, b)=(c, d) \Leftrightarrow a=c \wedge b=d.$$

我们现在可以去定义二元关系了.

(4.2) **定义** 设 A 与 B 是任意的两个集合. 令

$$A\times B=\{x \mid \exists a\in A \wedge \exists b\in B \ni \cdot x=(a, b)\},$$

则集合 $A\times B$ 叫做集合 A 与 B 的笛卡尔积，或简称为 A 与 B 的积. 如果 $R\subset A\times B$，则称 R 为 A 与 B 间的一个二元关系. 当 $(a, b)\in R$ 时，我们就说 a、b 之间有关系 R，并且记作 aRb. 特别地，当 $A=B=X$ 时，我们称 A、B 间的一个二元关系 R 为集合 X 中的一个二元关系. 二元关系也简称为关系.

由此可见，笛卡尔积 $A\times B$ 本身就是 A 与 B 间的一个关系.

例 6 令

$$R=\{x \mid \exists m, n\in \mathbb{N} \ni \cdot x=(m, n) \wedge m=n\};$$

则 R 正是 $\mathbb{N}$ 中通常的相等关系.

(4.3) **定义** 设 R 是集合 A 与 B 间的一个二元关系. 令

$$\operatorname{dom} R=\{x\in A \mid \exists y\in B\ni\cdot xRy\},$$

$$\operatorname{ran} R=\{y\in B \mid \exists x\in A\ni\cdot xRy\},$$

则 $\operatorname{dom} R$ 称为关系 R 的**定义域**, $\operatorname{ran} R$ 称为 R 的**值域**.

当 $A=B=X$, 而且 $\operatorname{dom} R=\operatorname{ran} R=X$ 时, 则 R 称为集合 X 上的一个二元关系. 例如例 6 中的 R 就是一个 $\mathbb{N}$ 上的关系.

在下面我们去讨论一些特殊的二元关系.

2. 函数 为了使函数的定义不依赖于诸如"法则"或"规律"等无定义的概念, 而使之建立在已经引入的概念的基础之上, 我们不妨以通常所理解的函数的"图象" (graph) 的概念作为函数的定义. 这是因为"函数"与"图象"两个概念显然是逻辑地等价的; 又"图象"只不过是前面已经定义了的一种二元关系.

(4.4) **定义** 设 X 与 Y 是任意给定的两个集合. 如果 X 与 Y 之间的一个二元关系 f 满足条件:

$$\forall x\in X,\ \exists y\in Y\ni\cdot(x,\ y)\in f,$$

则关系 f 叫做集合 X 到集合 Y 内的一个函数, 记作 $f: X\to Y$. 这时, 对于任何 $x\in X$, 如果 $(x,\ y)\in f$, 则将 y 写成 $f(x)$: $y=f(x)$, 称为函数 f 在 x 处的值, 或者称为 x 在 f 之下的象; 这时也说: f 给 x 以值 $f(x)$, 或者 f 把 x 映射到 $f(x)$, 或者 f 把 x 变换成 $f(x)$, 或者说, 在 f 之下, $f(x)$ 与 x 相应, 记作 $f: x\mapsto f(x)$. 如果 $f: x\mapsto y$, 即 $(x,\ y)\in f$, 则 x 称为 y 在函数 f 之下的一个原象.

从定义 (4.4) 立即看出, 当 $f: X\to Y$ 时, $\operatorname{dom} f=X$, 但函数 f 的值域 $\operatorname{ran} f$ 不一定是 Y, 因为 $\operatorname{ran} f$ 可能是 Y 的一个真子集.

(4.5) **定义** 设 $f: X\to Y$. 若 $\operatorname{ran} f=Y$, 即若

$$\forall y\in Y,\ \exists x\in X\ni\cdot f(x)=y,$$

则 f 称为集合 X 到集合 Y 上的一个**满函数** (surjection). 满函数

也称为到上的函数(onto function).

例 7 设 $X=Y=\mathbb{R}$. 如果 $\forall x\in\mathbb{R}$, 令

$$f: x\to y=\sin x,$$

则 f 非但不是满函数, 而且 $\forall y$, $-1\leqslant y\leqslant 1$, y 在 f 之下的原象都有无穷多个. 但是如果令 $X=\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $Y=\mathbb{R}$, 并令

$$\varphi: x\to y=\sin x,$$

则 φ 虽然不是满函数, 可是 $\forall y\in[-1, 1]$, y 在 φ 之下的原象都是唯一的. 显然, f 与 φ 不是同一个函数, 因为它们的定义域不同.

(4.6) **定义** 设 $f: X\to Y$, x、$x'\in X$. 如果

$$x\neq x'\Rightarrow f(x)\neq f(x'),$$

则称 f 是 X 到 Y 内的单函数 (injective function) 或一一函数 (one to one function). 如果 f 既是 X 到 Y 上的满函数, 又是单函数, 则 f 叫做 X 到 Y 上的双一一函数 (bijection).

下面命题的真实性是明显的.

(4.7) 设 $f: X\to Y$, x、$x'\in X$. f 是单函数 $\Leftrightarrow (f(x)=f(x')\Rightarrow x=x')$. 又 f 是单函数 $\Leftrightarrow \forall y\in \operatorname{ran} f$, y 在 f 之下的原象是唯一的.

由于函数是集合, 可见两个函数

$$f=g\Leftrightarrow \operatorname{dom} f=\operatorname{dom} g\land \forall x\in \operatorname{dom} f,\ f(x)=g(x).$$

设 $f: X\to\mathbb{R}$; 则 f 称为(定义在)集合 X 上的**实值函数**. 如果 $f: X\to\mathbb{C}$, 则 f 称为(定义在) X 上的**复值函数**. 实值函数与复值函数统称为**数值函数**.

映射、变换或者对应都是函数的同义词.

(4.8) **定义** 设 $f: X\to Y$, 并设 $A\subset X$, $B\subset Y$; 令

$$f(A)=\{y\in Y \mid \exists x\in A\ni\cdot f(x)=y\},$$

$$f^{-1}(B)=\{x\in X \mid f(x)\in B\},$$

则集合 $f(A)$，即 A 中一切元素的象所成的集合，叫做集合 A 的全象或象；集合 $f^{-1}(B)$ 叫做集合 B 的完全原象或原象．当 B 是一个单元集 $\{y\}$ 时，则 $f^{-1}(\{y\})$ 通常写成 $f^{-1}(y)$ 是 y 的一切原象所成的集合：

$$f^{-1}(y)=\{x\in X \mid f(x)=y\}$$

称为 y 在 f 之下的完全原象或逆象．

$f^{-1}(B)$ 及 $f^{-1}(y)$ 都可能是空集．例如，令

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad f:x\to\sin x;$$

则
$$f^{-1}([2,\ 3])=f^{-1}(2)=\emptyset.$$

如果 $f:X\to Y$，则 $\operatorname{ran} f=f(X)$．由此可见，$f$ 是满函数 $\Leftrightarrow$ $f(X)=Y$；f 是单函数 $\Leftrightarrow \forall y\in f(X)$，$f^{-1}(y)$ 是单元集．

(4.9) 设 $f:X\to Y$，并设 $A\subset X$，$B\subset Y$．那末，

1) $A\subset f^{-1}(f(A))$；若 f 是单函数，则 $f^{-1}(f(A))=A$；

2) $f(f^{-1}(B))\subset B$；若 f 是满函数，则 $f(f^{-1}(B))=B$；

3) $f^{-1}(\mathscr{C}B)=\mathscr{C}f^{-1}(B)$；其中，$\mathscr{C}B=Y-B$，$\mathscr{C}f^{-1}(B)=X-f^{-1}(B)$．

证 1) 我们有

$$x\in A\Rightarrow f(x)\in f(A)\Rightarrow x\in f^{-1}(f(A));$$

可见 $A\subset f^{-1}(f(A))$．如果 f 是单函数，则

$$x\in f^{-1}(f(A))\Rightarrow f(x)\in f(A)\Rightarrow \exists x'\in A\ni\cdot f(x')=f(x)\Rightarrow x'=x.$$

因此 $x\in A$．所以当 f 是单函数时有 $f^{-1}(f(A))\subset A$．于是由前面已经证得的结果推出 $f^{-1}(f(A))=A$．

2) 我们有

$$y\in f(f^{-1}(B))\Rightarrow\exists x\in f^{-1}(B)\ni\cdot f(x)=y\Rightarrow y=f(x)\in B;$$

所以 $f(f^{-1}(B))\subset B$．当 f 是满函数时，有

$$y\in B\Rightarrow\exists x\in X\ni\cdot f(x)=y\in B\Rightarrow x\in f^{-1}(B)\Rightarrow$$
$$y=f(x)\in f(f^{-1}(B)).$$

因此，当 f 是满函数时，$B\subset f(f^{-1}(B))$．再援引已经证得的结果，即得 $f(f^{-1}(B))=B$.

3) 等式 $f^{-1}(\mathscr{C}B)=\mathscr{C}f^{-1}(B)$ 直接由下列一系列等价式推出：

$x\in f^{-1}(\mathscr{C}B)\Leftrightarrow f(x)\in\mathscr{C}B\Leftrightarrow f(x)\notin B\Leftrightarrow x\notin f^{-1}(B)\Leftrightarrow x\in\mathscr{C}f^{-1}(B)$.】

(4.10) **定义** 设 $f:X\to Y$, $A\subset X$，且 $g:A\to Y$．如果

$$\forall x\in A,\ g(x)=f(x),$$

则 g 称为 f 在 A 上的限制，记作 $g=f|A$．当 $g=f|A$ 时，则 f 叫做 g 在 X 上的扩张或开拓.

例如在例 7 中，$\varphi=f\left|\left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]\right.$，而 f 是 φ 在 $\mathbb{R}$ 上的扩张.

(4.11) **定义** 设 $f:X\to Y$, $g:Y\to Z$．令

$$gf=\{(x,\ z)\in X\times Z\,|\,\forall x\in X,\ z=g(f(x))\},$$

则 gf 显然是 X 到 Z 内的一个函数，称为函数 f 与 g 的复合函数或合成函数．函数 f 与 g 的复合函数也简称为 f 与 g 的复合或合成.

(4.12) 如果 gf 是单函数，则 f 是单函数(左可消去性)．如果 gf 是满函数，则 g 是满函数(右可消去性).

(4.13) 如果 $f:X\to Y$ 是双一一函数，而且 $g:Y\to Z$ 是双一一函数，则 $gf:X\to Z$ 是双一一函数.

(4.14) $f:X\to Y$, $g:Y\to Z$,

$U\subset Z\Rightarrow(gf)^{-1}(U)=f^{-1}[g^{-1}(U)]$.

证 我们有

$$x\in(gf)^{-1}(U)\Leftrightarrow gf(x)=g(f(x))\in U\Leftrightarrow f(x)\in g^{-1}(U)$$
$$\Leftrightarrow x\in f^{-1}[g^{-1}(U)].$$

因此，$(gf)^{-1}(U)=f^{-1}[g^{-1}(U)]$．】

我们可以把 $f^{-1}[g^{-1}(U)]$ 简写成 $f^{-1}g^{-1}(U)$，于是(4.14)中的

等式变成 $(gf)^{-1}(U)=f^{-1}g^{-1}(U)$. 设 $A\subset X$; 则 $g[f(A)]$ 也可以简写成 $gf(A)$.

(4.15) **定义** 设 $X\subset Y$, 并设函数 f 定义如下:

$$\forall x\in X,\ f(x)=x.$$

那末, f 就叫做 X 到 Y 内的**内射函数**(inclusion function 或 injection). 内射函数通常用 i 来表示:

$$i=\{(x,y)\in X\times Y\mid \forall x\in X,\ x=y\}.$$

Y 到 Y 上的内射函数称为**恒等函数**(identity function), 并且用 e 来表示. 为了表示 i 是 X 到 Y 内的内射函数, 我们使用记号:

$$i: X\hookrightarrow Y.$$

(4.16) **定义** 设 $f: X\to Y$ 是一个双一一函数. 令

$$f^{-1}=\{r\in Y\times X\mid \forall y\in Y,\ \exists x\in X\ni\cdot r=(y,x)\wedge f(x)=y\}.$$

由于 f 是双一一函数, 因此

$$\forall y\in Y,\ \exists! x\in X\ni\cdot f(x)=y.$$

可见 f^{-1} 是 Y 到 X 上的一个函数, 称为函数 f 的**反函数**.

(4.17) 每个双一一函数 $f: X\to Y$ 都有一个反函数 $f^{-1}: Y\to X$, 它也是一个双一一函数. 如果令 e 及 e' 分别表示 X 到 X 上及 Y 到 Y 上的恒等函数, 则 $f^{-1}f=e$, $ff^{-1}=e'$, 并且 $(f^{-1})^{-1}=f$. 又如果 $g: Y\to Z$ 是一个双一一函数, 则 $(gf)^{-1}=f^{-1}g^{-1}$.

五、标 号 族

1. 标号族 为了某种目的, 我们有时需要强调一个函数的值以及它的值域, 这时就有必要引入特殊的记号来表示这一函数. 比如说, 设

$$f: I\to X;\ \forall i\in I,\ 可令\ x_i=f(i);$$

则函数 f 可表示为 $\{x_i\}_{i\in I}$, 并称后者为 X 中元素的一个**标号族**

(indexed family)，或简称为 X 中的一个族；I 称为标号集，I 中的每个元素 i 称为标号，而 $\forall i\in I$，x_i 称为族 $\{x_i\}_{i\in I}$ 的一个项，f 的值域 $f(I)$ 称为标示集(indexed set)．当标号集 I 是否明白写出无关重要时，X 中的一个族 $\{x_i\}_{i\in I}$ 可以简写成 $\{x_i\}$.

当 $I=\mathbb{N}$ 时，X 中的族 $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 常被写成 $\{x_n\}$，叫做 X 中的一个序列．如果

$$\forall n\in\mathbb{N},\ x_n=x_0\in X,$$

则序列 $\{x_n\}$，亦即序列 $(x_0,\ x_0,\ \cdots,\ x_0,\ \cdots)$ 叫做一个常序列，它的项虽有无穷多个，但它所有的项组成的集合(即标示集)却是一个单元集 $\{x_0\}$．如果 X 是一个数集或点集，则 X 中的序列 $\{x_n\}$ 就是常见的数列或点列了．现在任意固定一个 $n\in\mathbb{N}$；令

$$A(n)=\{\nu\in\mathbb{N}\,|\,\nu\leqslant n\},$$

则集合 $A(n)=\{1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n\}$ 称为自然数系 $\mathbb{N}$ 的一个 n 数段．如果标号集 $I=A(n)$，则族 $\{x_i\}_{i\in A(n)}$ 一般写成 $\{x_\nu\}_{1\leqslant\nu\leqslant n}$ 或 $(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)$ 叫做 X 中的一个有限序列或 n 元组．特别地，二元组 $(x_1,\ x_2)$ 也就是有序偶.

如果 X 是一个集合类，则得 X 中的一个集合族 $\{X_i\}_{i\in I}$，于此，$\forall i\in I$，X_i 是一个集合，并且 $X_i\in X$.

当标号集 $I\neq\emptyset$ 时，则族 $\{x_i\}_{i\in I}$ 叫做非空族；而当 $I=\emptyset$ 时，则 $\{x_i\}_{i\in I}$ 叫做空族.

2. 笛卡尔积　我们已经定义了两个集合的笛卡尔积，现在去推广这一概念.

(5.1)　**定义**　设 $\{X_i\}_{i\in I}$ 是任意的一个集合族．令

$$\prod_{i\in I}X_i=\{x\,|\,x=\{x_i\}_{i\in I}\text{ 其中 }\forall i\in I,\ x_i\in X_i\},$$

则集合 $\prod_{i\in I}X_i$ 称为所有集合 X_i 或集合族 $\{X_i\}$ 的笛卡尔积；在它的每个元素 $x=\{x_i\}_{i\in I}$ 中，x_i 称为 x 的 i 坐标，$\{X_i\}$ 的每个项

X_i 称为笛卡尔积 $\prod_{i\in I}X_i$ 的 $\dot{i}$ 因子或 $\dot{i}$ 坐标集. 笛卡尔积 $\prod_{i\in I}X_i$ 也简称为所有 X_i 的积, 并简写成 $\prod_i X_i$.

当标号集 $I=\mathbb{N}$ 时, 积 $\prod_{n\in\mathbb{N}}X_n$ 通常写成 $\prod_{n=1}^{\infty}X_n$, 或者写成

$$X_1\times X_2\times\cdots\times X_n\times\cdots,$$

它由所有的序列 $x=\{x_n\}$ 所组成, 于此, $\forall n\in\mathbb{N}$, $x_n\in X_n$.

当标号集 $I=\Delta(n)=\{1, 2, \cdots, n\}$ 时, 积 $\prod_{i\in\Delta(n)}X_i$ 通常写成 $\prod_{i=1}^{n}X_i$, 或者写成

$$X_1\times X_2\times\cdots\times X_n,$$

它由所有的 n 元组 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 所组成, 于此, $\forall i\in\Delta(n)$, $x_i\in X_i$. 当 $n=2$ 时, 我们就得到上一节第 1 款中已经定义了的两个集合的笛卡尔积 $X_1\times X_2$.

如果 $\forall n\in\mathbb{N}$ $(\forall i\in\Delta(n))$, $X_n=X(X_i=X)$, 则积 $\prod_{n=1}^{\infty}X_n$ $(\prod_{i=1}^{n}X_i)$ 可以写成 $X^{\infty}(X^n)$; 又 $X^1=X$.

在笛卡尔积 $\prod_{n=1}^{\infty}X_n$ 或 $\prod_{i=1}^{n}X_i$ 中, 元素 $x=\{x_n\}$ 或 $x=\{x_i\}_{1\le i\le n}$ 的 i 坐标将称为第 $\dot{i}$ 坐标; 又积的 i 因子将称为第 $\dot{i}$ 因子.

(5.2) **定义** 对于任一固定的 $i_0\in I$, 设 p_{i_0}: $\prod_{i\in I}X_i\to X_{i_0}$, 并设 $\forall x=\{x_i\}\in\prod_i X_i$, $p_{i_0}(x)=x_{i_0}\in X_{i_0}$. 如此, 则 p_{i_0} 称为积 $\prod_i X_i$ 到集合 X_{i_0} 上的投影或 i_0 坐标函数.

例 8 如果 $\forall i\in I$, $X_i=X$, 则 $\prod_i X_i=X^I$, 其中 X^I 表示 I 到 X 内的所有函数组成的集合:

$$X^I=\{x\,|\,x:I\to X\}.$$

特别地, 积 $\prod_{i\in\mathbb{R}}\mathbb{R}=\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ 是一切定义在 $\mathbb{R}$ 上的实值函数组成的集合.

例 9 设 $\forall n\in\mathbb{N}$, $X_n=\mathbb{R}$; 则 $\prod_{n=1}^{\infty}X_n=\mathbb{R}^{\infty}$, 它是所有实数列 $x=\{x_n\}$ 组成的集合. 对于一个固定的 $n\in\mathbb{N}$, $\mathbb{R}^n$ 是所有实的

n 数组$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$组成的集合；特别地，$\mathbb{R}^2$ 可以看成是笛卡尔坐标平面，$\mathbb{R}^3$ 是笛卡尔坐标空间. 对 $\mathbb{R}^3$ 来说，坐标函数 p_1, p_2, p_3 分别把 $\mathbb{R}^3$ 的任意点 $x=(x_1, x_2, x_3)$ 正交地投影到第一、第二、第三坐标轴 $\mathbb{R}$ 上：$p_i(x)=x_i$ $(i=1, 2, 3)$.

利用笛卡尔积，选择公理可表述如下：

(5.3) **选择公理** 设 $\{X_i\}_{i\in I}$ 是任一非空集合族. 如果对于每个标号 $i\in I$，$X_i\neq\emptyset$，则 $\prod_{i\in I}X_i\neq\emptyset$.

3. 集合的运算(续) 我们现在去推广并集与交集的概念：

(5.4) **定义** 设 $\{X_i\}_{i\in I}$ 是任意一个集合族. 集合

$$\bigcup_{i\in I}X_i=\{x\mid\exists i\in I\ni\cdot x\in X_i\},$$

$$\bigcap_{i\in I}X_i=\{x\mid x\in X_i,\ \forall i\in I\}$$

分别称为集合族$\{X_i\}_{i\in I}$或所有集合 X_i 的并集与交集.

当标号集 $I=\mathbb{N}$ 时，即得一序列集合 $\{X_n\}$ 的并集 $\bigcup_{n=1}^{\infty}X_n$ 与交集 $\bigcap_{n=1}^{\infty}X_n$，它们也可以分别记作

$$X_1\cup X_2\cup\cdots\cup X_n\cup\cdots \quad 及 \quad X_1\cap X_2\cap\cdots\cap X_n\cap\cdots.$$

当标号集 $I=A(n)$ 时，则得一有限序列集合 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 的并集 $\bigcup_{i=1}^{n}X_i$ 与交集 $\bigcap_{i=1}^{n}X_i$，它们也可以分别记作

$$X_1\cup X_2\cup\cdots\cup X_n \quad 及 \quad X_1\cap X_2\cap\cdots\cap X_n.$$

当 $n=2$ 时，则所得即为定义(3.6)中的两个集合的并集与交集.

(5.5) 对于集合的空族 $\{X_i\}_{i\in\emptyset}$，我们有

$$\bigcup_{i\in\emptyset}X_i=\emptyset, \qquad \bigcap_{i\in\emptyset}X_i=\mathscr{U}.$$

证 如果 $\bigcup_{i\in\emptyset}X_i$ 含有一个元素 x，则标号集 $\emptyset$ 中就应该有一个元素 i，s. t. $x\in X_i$. 但这是不可能的，因为空集 $\emptyset$ 不含任何元素. 所以 $\bigcup_{i\in\emptyset}X_i=\emptyset$. 于是第一个等式得证.

我们仍然用归谬法去证明第二个等式：如果全集 $\mathscr{U}$ 有一个

元素 $x \notin \bigcap_{i\in\emptyset} X_i$, 则空集 $\emptyset$ 中将有一个元素 i, s. t. $x \notin X_i$. 这同样是不可能的. 因此, $\mathscr{U} \subset \bigcap_{i\in\emptyset} X_i$, 从而有 $\bigcap_{i\in\emptyset} X_i = \mathscr{U}$. 】

令 $V = \bigcup_{i\in I} X_i$, $D = \bigcap_{i\in I} X_i$. 下面的命题是显而易见的.

(5.6) 1) $\forall i \in I, V \supset X_i$;

2) $M \in \mathscr{P}(\mathscr{U}) \ni \cdot \forall i \in I, M \supset X_i \Rightarrow M \supset V$.

(5.7) 1) $\forall i \in I, D \subset X_i$;

2) $M \in \mathscr{P}(\mathscr{U}) \ni \cdot \forall i \in I, M \subset X_i \Rightarrow M \subset D$.

命题(5.6)说明, 所有 X_i 的并集 V 是包含每个集合 X_i 的所有集合中的最小集合. 命题(5.7)说明, 所有 X_i 的交集 D 是包含于每个集合 X_i 的所有集合中的最大集合.

(5.8) **笛·摩尔根定律** 1) $\mathscr{C}(\bigcup_{i\in I} X_i) = \bigcap_{i\in I} \mathscr{C} X_i$;

2) $\mathscr{C}(\bigcap_{i\in I} X_i) = \bigcup_{i\in I} \mathscr{C} X_i$.

证 我们去证明 1):

$$x \in \mathscr{C}(\bigcup_{i\in I} X_i) \Leftrightarrow x \notin \bigcup_{i\in I} X_i \Leftrightarrow \forall i \in I, x \notin X_i \Leftrightarrow \forall i \in I,$$
$$x \in \mathscr{C} X_i \Leftrightarrow x \in \bigcap_{i\in I} \mathscr{C} X_i.$$

因此 1) 成立. 为了证明 2), 可令 $Y_i = \mathscr{C} X_i$; 则由已证得的 1), 我们有

$$\mathscr{C}(\bigcup_i Y_i) = \bigcap_i \mathscr{C} Y_i = \bigcap_i X_i.$$

因此,

$$\mathscr{C}(\bigcap_i X_i) = \mathscr{C}\mathscr{C}(\bigcup_i Y_i) = \bigcup_i Y_i = \bigcup_i \mathscr{C} X_i. \text{ 】}$$

设 $W \subset \mathscr{U}$; 则易证下面的两个分配律成立:

(5.9) 1) $W \cap (\bigcup_i X_i) = \bigcup_i (W \cap X_i)$;

2) $W \cup (\bigcap_i X_i) = \bigcap_i (W \cup X_i)$.

令 $\{W_i\}_{i\in I}$ 与 $\{X_k\}_{k\in K}$ 为任意两个集合族; 则容易证明:

(5.10) 1) $(\bigcup_{i\in I} W_i) \cap (\bigcup_{k\in K} X_k) = \bigcup_{(i,k)\in I\times K} (W_i \cap X_k)$;

2) $(\bigcap_i W_i) \cup (\bigcap_k X_k) = \bigcap_{(i,k)} (W_i \cup X_k)$.

设 f 是一个集合 X 到同一个或另一个集合 Y 内的一个函数,

并设$\{X_i\}_{i\in I}$是$\mathscr{P}(X)$中的一个族，$\{Y_k\}_{k\in K}$是$\mathscr{P}(Y)$中的一个族。我们有下列公式：

(5.11) 1) $f^{-1}(\bigcup_{k\in K} Y_k)=\bigcup_{k\in K} f^{-1}(Y_k)$；

2) $f^{-1}(\bigcap_{k\in K} Y_k)=\bigcap_{k\in K} f^{-1}(Y_k)$.

(5.12) $f(\bigcup_{i\in I} X_i)=\bigcup_{i\in I} f(X_i)$.

比如我们去证明(5.11) 1) 与 (5.12)。由定义 (4.8) 与定义(5.4)看出，

$$x\in f^{-1}(\bigcup_{k\in K} Y_k)\Leftrightarrow f(x)\in\bigcup_{k\in K} Y_k\Leftrightarrow\exists k\in K\ \text{s.t.}\ f(x)\in Y_k$$
$$\Leftrightarrow\exists k\in K\ \text{s.t.}\ x\in f^{-1}(Y_k)\Leftrightarrow x\in\bigcup_{k\in K} f^{-1}(Y_k),$$

所以(5.11) 1)成立。∎

现在去证明(5.12)：

$$y\in f(\bigcup_{i\in I} X_i)\Leftrightarrow\exists x\in\bigcup_{i\in I} X_i\ \text{s.t.}\ f(x)=y$$
$$\Leftrightarrow\exists i\in I\wedge\exists x\in X_i\ \text{s.t.}\ f(x)=y$$
$$\Leftrightarrow\exists i\in I\ \text{s.t.}\ y\in f(X_i)\Leftrightarrow y\in\bigcup_{i\in I} f(X_i),$$

这证明了公式(5.12)。∎

公式(5.9)、(5.10)及(5.11) 2)的证明留给读者.

然而集合$f(\bigcap_i X_i)$可并不一定等于集合$\bigcap_i f(X_i)$，我们只能有下面的包含式：

(5.13) $f(\bigcap_i X_i)\subset\bigcap_i f(X_i)$.

命题(5.13)的证明留给读者.

为了说明包含式$\bigcap_i f(X_i)\subset f(\bigcap_i X_i)$不成立，令$f$为集合$X$到集合$Y$内的一个常值函数，即$f(X)$仅仅由$Y$中唯一的一个元素$b_0$所组成：$f(X)=\{b_0\}$.如果$I$至少包含两个元素，并且

$$\forall i\in I,\ X_i\neq\emptyset,\ \text{又}\ i,\ i'\in I,\ i\neq i'\Rightarrow X_i\cap X_{i'}=\emptyset,$$

则见 $$f(\bigcap_i X_i)=f(\emptyset)=\emptyset,\ \bigcap_i f(X_i)=\{b_0\}.$$

因此， $$\bigcap_i f(X_i)\not\subset f(\bigcap_i X_i).$$

然而下面的命题却是真实的(证明留给读者)：

(5.14) 如果 f 是单函数，则

$$f(\bigcap_i X_i) = \bigcap_i f(X_i).$$

我们现在去定义笛卡尔的"部分积"。

(5.15) **定义** 设 $\{A_\lambda\}_{\lambda\in L}$ 是任意的一个集合族，并设 $\forall\lambda\in L$, $U_\lambda\subset A_\lambda$. 现在从 L 中随意选出 m 个标号 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$, 并以记号 $\prod(U_{\lambda_1}, U_{\lambda_2}, \cdots, U_{\lambda_m})$ 表示笛卡尔积

$$\prod_{\lambda\in L} V_\lambda,$$

其中当 $\lambda=\lambda_i$ $(i=1, 2, \cdots, m)$ 时，$V_\lambda=U_\lambda$，而当 λ 不等于任何一个 λ_i 时，$V_\lambda=A_\lambda$. 我们称笛卡尔积 $\prod(U_{\lambda_1}, U_{\lambda_2}, \cdots, U_{\lambda_m})$ 为笛卡尔积 $\prod_{\lambda\in L} A_\lambda$ 关于 $U_{\lambda_1}, U_{\lambda_2}, \cdots, U_{\lambda_m}$ 的一个部分积.

下面的公式成立：

(5.16) $\prod(U_{\lambda_1}, U_{\lambda_2}, \cdots, U_{\lambda_m}) = p_{\lambda_1}^{-1}(U_{\lambda_1})\cap p_{\lambda_2}^{-1}(U_{\lambda_2})\cap\cdots\cap p_{\lambda_m}^{-1}(U_{\lambda_m})$，其中 $p_{\lambda_i}(i=1, 2, \cdots, m)$ 是积 $\prod_{\lambda\in L} A_\lambda$ 到 A_{λ_i} 上的投影.

证 令 $x=\{x_\lambda\}$ 为部分积 $\prod(U_{\lambda_1}, U_{\lambda_2}, \cdots, U_{\lambda_m})$ 的任一元素；则由定义(5.15)，

$$\forall i\,(i=1, 2, \cdots, m),\quad x_{\lambda_i}\in U_{\lambda_i}$$

既然 $\forall i$ $(i=1, 2, \cdots, m)$, $p_{\lambda_i}(x)=x_{\lambda_i}\in U_{\lambda_i}$, 可见 $\forall i\,(i=1, 2, \cdots, m)$, $x\in p_{\lambda_i}^{-1}(U_{\lambda_i})$. 这证明了

$$\prod(U_{\lambda_1}, U_{\lambda_2}, \cdots, U_{\lambda_m})\subset p_{\lambda_1}^{-1}(U_{\lambda_1})\cap p_{\lambda_2}^{-1}(U_{\lambda_2})\cap\cdots\cap p_{\lambda_m}^{-1}(U_{\lambda_m}).$$

同理易证

$$p_{\lambda_1}^{-1}(U_{\lambda_1})\cap p_{\lambda_2}^{-1}(U_{\lambda_2})\cap\cdots\cap p_{\lambda_m}^{-1}(U_{\lambda_m})\subset\prod(U_{\lambda_1}, U_{\lambda_2}, \cdots, U_{\lambda_m}),$$

公式(5.16)就证明了. ▌

令 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m, \lambda_{m+1}, \cdots, \lambda_p$ 为 L 中的 p 个标号 $(p>m)$；则下面的公式显然成立：

(5.17)
$$\prod(U_{\lambda_1}, U_{\lambda_2}, \cdots, U_{\lambda_m})\cap\prod(U_{\lambda_{m+1}}, \cdots, U_{\lambda_p}) = \prod(U_{\lambda_1}, U_{\lambda_2}, \cdots, U_{\lambda_p}).$$

六、等价关系与偏序关系

1. 等价关系 等价关系是不同于函数的另一种二元关系，它是"相等"这一概念的推广．下面谈到的集合 X 以及族 $\{X_i\}_{i\in I}$ 都是非空的．

(6.1) **定义** 设 R 是集合 X 中的一个二元关系，并设 x、y、$z\in X$．如果下列条件满足，则 R 就叫做集合 X 上的一个等价关系：

1) $\forall x,\ xRx$（自反性）；

2) $xRy\Rightarrow yRx$（对称性）；

3) $xRy\wedge yRz\Rightarrow xRz$（传递性）．

从(6.1)中的条件 1)立即看出，等价关系是集合 X 上的一个关系．

以后我们将用记号 $\sim$ 或 $\cong$ 表示等价关系．如果R是集合 X 上的一个等价关系，则将 xRy 写成 $x\sim y$ 或 $x\cong y$．

显而易见，凡相等关系都是等价关系．此外，如果令 X 表示所有三角形组成的集合，则两个三角形的相似也是 X 上的一个等价关系．

一个集合上的等价关系与这个集合的分类有着极为密切的联系，而事实上，这两个概念是等价的．在下面我们就去定义一个集合的分类．

(6.2) **定义** 设 $\{X_i\}_{i\in I}$ 是已知集合 X 的子集的一个族，即 $\forall i\in I,\ X_i\subset X$．如果下面的三个条件满足：

1) $X=\bigcup_{i\in I}X_i$；

2) $\forall i\in I,\ X_i\neq\emptyset$；

3) $\forall(i,\ i')\in I\times I,\ i\neq i'\Rightarrow X_i\cap X_{i'}=\emptyset$；

那末，集合族 $\{X_i\}_{i\in I}$ 就叫做集合 X 的一个分类，每个 X_i 叫做分类 $\{X_i\}_{i\in I}$ 中的一个类.

下面的定理是众所周知的.

(6.3) **定理** 集合 X 上的每个等价关系 $\sim$ 决定 X 的一个分类 $\{X_i\}_{i\in I}$，使得 X 的元素 x 与 x' 属于同一类 $X_i \Leftrightarrow x\sim x'$. 反之，集合 X 的每个分类 $\{X_i\}_{i\in I}$ 决定 X 上的一个等价关系 $\sim$，其定义如下：

$$x\sim x' \Leftrightarrow x \text{ 与 } x' \text{ 属于同一类 } X_i.$$

证明从略[①].

(6.4) **定义** 等价关系 $\sim$ 所决定的分类 $\{X_i\}_{i\in I}$ 中的每个类 X_i 都叫做关于关系 $\sim$ 的**等价类**. 如果 $x\in X_i$，则 x 称为等价类 X_i 中的一个**代表**. 所有等价类组成的集合叫做按等价关系 $\sim$ 而得到的 X 的商集或称 X 对于 $\sim$ 的商集，记作 $X/\sim$.

如果 x 是等价类 X_i 中的一个代表，则等价类 X_i 也可以记作 $\bar{x}$; $\bar{x}=X_i$. 显然，如果 x, $y\in X$，则

$$\bar{x}=\bar{y} \Leftrightarrow x\sim y;$$

又

$$\bar{x}\cap\bar{y}=\emptyset \Leftrightarrow x \text{ 不}\sim y.$$

例 10 令 a, $b\in\mathbb{Z}$，并定义

$$a\sim b \Leftrightarrow 4\mid a-b,$$

$$\text{即 } a\sim b \Leftrightarrow a\equiv b \pmod 4),$$

则显然 $\sim$ 是整数系 $\mathbb{Z}$ 上的一个等价关系. 商集 $\mathbb{Z}/\sim$ 由四个等价类 $\bar{0}$、$\bar{1}$、$\bar{2}$、$\bar{3}$ 所组成，记作 $\mathbb{Z}_4$，它是模 4 $\mathbb{Z}$ 的剩余类环：

$$\mathbb{Z}/\sim=\{\bar{0},\ \bar{1},\ \bar{2},\ \bar{3}\}=\mathbb{Z}_4.$$

例 11 设 $\varphi: X\to Y$. 令 x, $x'\in X$，并定义关系 $x\sim x'$ 如下：

$$x\sim x' \Leftrightarrow \varphi(x)=\varphi(x').$$

---

① 比如说，可参考张禾瑞《近世代数基础》(1978 年修订本)，第一章，§10，人民教育出版社.

显而易见，$\sim$是集合 X 上的一个等价关系，并且 $\forall x\in X$, $\tilde{x}=\varphi^{-1}(\varphi(x))$. 因此，如果令 $y\in\varphi(X)$，则一切 $\varphi^{-1}(y)$ 组成的集合就是 X 对于关系$\sim$的商集 $X/\sim$.

上例中的关系$\sim$称为**由函数 φ 导出的等价关系**.

(6.5) **定义** 设$\sim$是集合 X 上的任一等价关系. 如果

$$\forall x\in X, \text{令 } f(x)=\tilde{x}\in X/\sim,$$

则 f 显然是集合 X 到商集 $X/\sim$ 上的一个满函数，称为集合 X 到商集 $X/\sim$ 上的**自然映射**或**商映射**.

设$\sim$为集合 X 上的任一等价关系，并设例 11 中的集合 Y 就是按关系$\sim$而得到的 X 的商集: $Y=X/\sim$. 如果用$\cong$表示由 X 到 Y 上的自然映射 f 所导出的 X 上的等价关系，则不难看出这两个等价关系$\sim$及$\cong$是同一个关系. 事实上，设 $x\cong x'$ 成立，则 $f(x)=f(x')$; 因此，x 与 x' 属于关于$\sim$的同一等价类 $\tilde{x}$，所以 $x\sim x'$ 成立. 反之不难看出，$x\sim x'\Rightarrow x\cong x'$. 由于二元关系是集合，可见关系$\sim$与$\cong$相等.

2. 偏序关系·卓伦(Zorn)引理 我们在这一款里主要想引进卓伦引理以备后用，但不给以证明. 为此，我们必须先引入偏序集的概念.

(6.6) **定义** 一个集合 X 中元素 a、b、c、…之间的一个二元关系$\leqslant$叫做**偏序的**，如果它满足下列两个条件的话:

1) $a\leqslant b$, $b\leqslant a\Leftrightarrow a=b$;

2) $a\leqslant b$, $b\leqslant c\Rightarrow a\leqslant c$.

具有偏序关系$\leqslant$的集合 X，记作$(X, \leqslant)$，叫做**偏序集**. 记号 $a\leqslant b$ 也可以写成 $b\geqslant a$，读作"a 在 b 的前面"或"b 在 a 的后面". 如果除条件 1) 与 2) 以外，关系$\leqslant$还满足下面的条件:

3) $\forall(a, b)\in X\times X$, $a\leqslant b\vee b\leqslant a$,

那末，关系$\leqslant$就叫做 X 上的一个**全序关系**，并且$(X, \leqslant)$就叫做一个**全序集**. 当不致产生误解时，无论全序集或偏序集$(X, \leqslant)$都将用单独一个字母 X 来表示.

由条件 1) 可知，偏序关系$\leqslant$是集合上的一个关系，并且具有自反性，即 $\forall a \in X,\ a \leqslant a$ 总成立.

例 12 设集合 A 至少包含两个元素，令 $X=\mathscr{P}(A)$；则见$(X, \subset)$是一个偏序集，但不是全序的. 如果在实数系 $\mathbb{R}$ 中取通常的大小次序关系$\leqslant$，则$(\mathbb{R}, \leqslant)$是一个全序集. 又$(\mathscr{P}(A), \subset)$虽然不是全序集，但它显然在关系 $\subset$ 下有全序子集.

设 R 是 X 中的一个二元关系，即 $R \subset X \times X$. 设 $A \subset X$，我们称 $R \cap (A \times A)$ 是 R **限制于** A **的一个关系**.

这样，如果 X 是具有偏序关系$\leqslant$的偏序集，$A \subset X$，则将$\leqslant$限制于 A，所得仍为一偏序集，记作$(A, \leqslant)$，称为已知偏序集$(X, \leqslant)$的**偏序子集**. 以后凡提到一个**偏序集** X **的子集**时，总指的是它的偏序子集.

(6.7) **定义** 设 A 是偏序集X 的一个子集. 如果

$$\exists u \in X \ni \cdot \forall a \in A, \quad a \leqslant u,$$

则称 A 为**有上界**，而元素 u 就叫做 A 的一个**上界**. 如果

$$\exists l \in X \ni \cdot \forall a \in A, \quad l \leqslant a,$$

则称 A 为**有下界**，而元素 l 就叫做 A 的一个**下界**.

显而易见，如果 u 是集合 A 的一个上界，并且 $u' \in X,\ u \leqslant u'$，则 u' 也是 A 的一个上界；如果 l 是 A 的一个下界，并且 $l' \in X$，$l' \leqslant l$，则 l' 也是 A 的一个下界.

(6.8) **定义** 如果非空偏序集 X 的每个全序子集在 X 中总有一个上界，那末，X 就叫做一个**归纳集**(inductive set).

例 13 在 $\mathbb{R}$ 中引入通常的次序关系$\leqslant$，则 $\mathbb{R}$ 显然不是一个归纳集，因为它本身就是全序的，但 $\mathbb{R}$ 中没有它自己的上界. 如果在

有界闭区间$[a, b]$中$(a<b)$引入同样的次序关系，则$[a, b]$显然是一个归纳集. 又例12中的$X=\mathscr{P}(A)$在偏序关系$\subset$下是一个归纳集，因为X的元素A是X的每个全序子集的上界.

偏序集X的每个全序子集都叫做X中的一条链. 于是归纳集的定义可表述如下：

非空偏序集是归纳集$\Leftrightarrow X$中的每条链在X中总有上界.

(6.9) **定义** 设A是偏序集X的一个子集，$a_0 \in A$. 如果

$$\forall a \in A,\ a_0 \leqslant a \Rightarrow a \leqslant a_0,$$

换句话说，如果A中没有一个元素异于a_0而又在a_0的后面，那末，a_0就叫做A的一个**极大元**[①].

应该注意的是，如果A中有极大元，极大元往往不止一个.

例14 令$M=\{1, 2, 3, 4\}$，$X=\mathscr{P}(M)$. 在X中定义$\leqslant$为$\subset$. 如果

$$A=\{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 4\}\},$$

则$\{3\}$，$\{1, 2\}$，$\{1, 4\}$都是A的极大元.

(6.10) **卓伦引理** 任何归纳集必定至少包含一个极大元.

可以证明[②]：卓伦引理是与选择公理等价的. 因此，我们不妨把卓伦引理看成公理而不予以证明. 既然K. Gödel[③]已于1940年证明了选择公理的和谐性，我们无条件地承认这一公理.

---

① 某些作者只用传递性，即定义(6.6)中的条件2)来定义偏序关系(我们不妨称之为一般偏序关系)，而称按(6.6)定义的偏序关系为**正常的**(proper)与**自反的**. 见S. Lefschetz, Algebraic Topology, pp. 4—5. 按照这样的定义，在正常自反的偏序集中，显然定义(6.9)与用条件

$$\forall a \in A,\ a_0 \leqslant a \Rightarrow a=a_0$$

来介绍极大元的定义是等价的.

② 参阅J. L. Kelly, General Topology, pp. 33—36; 或G. Birkhoff, Lattice Theory, pp. 42—44.

③ 参阅K. Gödel, The Consistency of the Axiom of Choice and of the Generalized Continuum Hypothesis with the Axioms of Set Theory. (Annals of Math. Studies, No. 3) Lithoprinted. Princeton, 1940.

七、有限集与可数集·基数

本节的主要内容正如标题所述．这些概念以及与此相关的概念和基本性质，都建立在双一一函数的概念及其基本性质的基础之上．在这一节里，我们只对个别定理予以证明，其余定理的证明可参考《实变函数论》或《近世代数》的教科书或专著[①]．

1. 集合的对等　在生产、工作与日常生活中，我们经常通过由一些人或事物组成的一个集合到自然数系N的一个 n 数段 $A(n)$ 的某个双一一对应来计数．中、小学里课堂里的点名，看电影时的一人一票或对号入座，都是双一一对应的．把这一切概括起来，并提到数学科学的高度，我们就得到下面所定义的、两个集合"对等"的概念．

(7.1)　**定义**　设 A 与 B 表示任意两个集合．如果存在着 A 到 B 上的一个双一一函数，我们就说集合 A 与集合 B **对等**或**等势**，记作：$A\sim B$，读成"A 对等(或等势)于 B"或"A 与 B 对等(或等势)"．

下面的命题的真实性是显而易见的．

(7.2)　令 A、B、C 表示任意三个集合．那末，

1° $A\sim A$(自反性)；

2° $A\sim B\Rightarrow B\sim A$ (对称性)；

3° $A\sim B\wedge B\sim C\Rightarrow A\sim C$ (传递性)．

关于集合的对等有下面两个基本定理．

(7.3)　**施罗德-伯伦斯坦** (Schröder–Bernstein) **定理**　如果

---

① 比如说，可参考И. П. 那汤松著，徐瑞云译：《实变函数论》，高等教育出版社(或人民教育出版社)，1958 年新 2 版．

集合 A 与集合 B 的一个子集对等，又集合 B 与集合 A 的一个子集对等，则 $A\sim B$.

(7.4) **定理** 对于任意的两个集合 A 与 B，或者 A 与 B 的一个子集对等，或者 B 与 A 的一个子集对等.

定理(7.4)的证明见附录，在这个证明中我们用到卓伦引理.

2. 有限集与无穷集 前面我们已经提到过有限与无穷的概念，例如“有限序列”、“无穷多个”等等. 我们现在去给集合中元素的“有限多个”与“无穷多个”以较为精确的涵义.

(7.5) **定义** 空集以及与任一 n 数段 $A(n)$ 对等的集合叫做**有限集**. 不能与任何有限集对等的集合叫做**无穷集或无限集**. 一个集合如果是有限的，则我们说它含有有限多个元素；如果是无穷的，则说它含有无穷多个或无限多个元素.

设 $\{a_\lambda\}_{\lambda\in L}$ 是任意的一个族. $\{a_\lambda\}_{\lambda\in L}$ 称为有限或无穷族，那就要看标号集 L 是有限或无穷集而定. 一个有限集合族的交集或并集，分别称为**有限交或有限并**. 同样我们可以定义**无穷交与无穷并**.

有限集的一般理论以下面的定理为基石.

(7.6) **有限集的基本定理** 任何有限集决不能与以它为真子集的任何集合对等.

从有限集的基本定理我们看出，自然数系 $\mathbb{N}$ 决不能与任何一个 n 数段 $A(n)$ 等势，当然更不能与空集等势，从而它也就不能与任何一个有限集等势. 因此自然数系 $\mathbb{N}$ 是无穷集. 由此推出，任何与 $\mathbb{N}$ 等势的集合都是无穷集. 同时，利用(7.6)不难证明：

(7.7) 有限集的任何子集都是有限集.

由此立即看出，凡包含一个无穷集的集合必定是无穷集. 于是，整数系 $\mathbb{Z}$、有理数系 $\mathbb{Q}$、实数系 $\mathbb{R}$ 与复数系 $\mathbb{C}$ 都是无穷集.

下面的命题是定理(7.6)与(7.7)的直接推论.

(7.8) 如果一个集合与它的一个真子集等势, 那末, 这个集合必须是无穷集.

命题(7.8)的逆命题也是真的. (7.8)与它的逆合起来可表述如下: 一个集合是无穷集的必要与充分条件是, 它与它的一个真子集等势. 这叫做**戴德金-皮尔斯** (Dedekind-Pierce) **定理**.

3. 可数集与不可数集 我们现在对无穷集作进一步探讨.

(7.9) **定义** 与自然数系 $\mathbb{N}$ 等势的任何集合都叫做**无穷可数的**. 有限集与无穷可数集统称为**可数集**. 不与任何可数集等势的集合叫做**不可数集**. 如果一个集合是可数的, 我们就说它含有可数多个元素; 是不可数的, 则说它含有不可数多个元素.

对于一个族 $\{a_\lambda\}_{\lambda\in L}$, 可仿照有限族与无穷族的定义去定义可数族与不可数族, 从而给出集合族的可数与不可数并和可数与不可数交的定义.

显然, 凡不可数集必然是无穷集. 关于可数集, 我们有与(7.7)类似的下面的命题:

(7.10) 可数集的任何子集都是可数的.

不难证明: $\mathbb{N}\times\mathbb{N}\sim\mathbb{N}$; 换句话说, $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ 是可数的(当然是无穷可数的). 由此用数学归纳法容易证明:

(7.11) $\forall n\in\mathbb{N}$, n 个可数集的笛卡尔积是可数的.

此外不难证明:

(7.12) 可数集的可数并是可数的.

由此可见, 整数系 $\mathbb{Z}$ 是可数的. 如果把任一有理数 $r=\frac{m}{n}$ $(m, n\in\mathbb{Z}, n>0, m$ 与 n 互质)看成整数的有序偶(m, n), 则立即看出, 有理数系 $\mathbb{Q}$ 是可数的, 尽管它是稠密的. 我们容易证明:

自然数系$\mathbb{N}$的一切有限子集所成的集合是可数的. 由此立即推出，任何可数集的一切有限子集所成的集合是可数的. 利用(7.11)及(7.12)易知，整数系$\mathbb{Z}$中一切有限序列所成的集合是可数的. 由于$\mathbb{Z}$中的每一个首项不为零的有限数列$(a_0, a_1, \cdots, a_n)$决定一个n次的整系数多项式，

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n. \quad (a_0\neq 0)$$

反之亦然. 因此，一切整系数的多项式所成的集合是可数的. 由此推出：所有代数数组成的集合是一个可数集. 下面的定理指出了不可数集的存在：

(7.13) 无穷可数多个自然数系$\mathbb{N}$的笛卡尔积$\mathbb{N}^\infty$是不可数的.

由于$\mathbb{N}^\infty$由一切自然数列所组成，因此(7.13)又可以表述为：$\mathbb{N}$中一切数列所成的集合是不可数的. 这个定理的证明要用所谓的"对角线法"，是众所周知的. 作为(7.13)的直接推论是下面的命题，如果$\{A_n\}$是任一无穷可数集的序列，则笛卡尔积$\prod_{n=1}^{\infty} A_n$是一个不可数集.

把单位区间$I=[0, 1]$中的每个数都表示成十进小数，除了把1表示成0.999…9…外，以9为循环节的一概不用. 同样使用"对角线法"，可以证明：单位闭区间$[0, 1]$是不可数的. 设$a, b\in\mathbb{R}$, $a<b$. 定义$f:[0, 1]\to[a, b]$如下：$\forall x\in[0, 1]$，令

$$f(x)=(b-a)x+a,$$

则见f是$[0, 1]$到$[a, b]$的双一一函数. 由此可见：

(7.14) 任何有限闭区间$[a, b]$都是不可数的.

作为(7.14)的重要推论是：

(7.15) 实数系$\mathbb{R}$是不可数的.

证 事实上，如果$\mathbb{R}$可数，则由(7.10)，任何有限闭区间将为可数，这与(7.14)矛盾. ▌

如果以$\mathbb{I}$表示所有无理数组成的集合，则因$\mathbb{R}=\mathbb{I}\cup\mathbb{Q}$，$\mathbb{Q}$为可数集，所以由(7.15)及(7.12)看出，$\mathbb{I}$必然是一个不可数集．这说明，无理数的个数比有理数的多得多．现在令$\mathbb{A}$表示所有（实的）代数数所成的集合，$\mathbb{T}$表示所有超越数所成的集合，则同样因为$\mathbb{R}=\mathbb{A}\cup\mathbb{T}$，而$\mathbb{A}$为可数，所以我们证明了下面的有趣定理：

(7.16)　超越数不但是存在的，而且有不可数多个．

4. 基数或势　我们现在把有限集中元素的个数的概念推广到一般集合．

(7.17)　**定义**　对于每个集合A，我们给它一个记号$\operatorname{card}A$，使得当而且只当集合$B\sim A$时，才有

$$\operatorname{card}A=\operatorname{card}B,$$

那末，$\operatorname{card}A$就叫做集合A的**基数或势**，也不妨叫做A的**元素的个数**．

如果有限集A与$\mathbb{N}$的一个n数段$A(n)=\{1, 2, 3, \cdots, n\}$等势，则令

$$\operatorname{card}A=\operatorname{card}A(n)=n,$$

又空集的基数为0：$\operatorname{card}\varnothing=0$．

无穷集的基数称为**超限数**．

无穷可数集的基数记作$\aleph_0$，即若$A\sim\mathbb{N}$，则

$$\operatorname{card}A=\operatorname{card}\mathbb{N}=\aleph_0.$$

(7.18)　**定义**　设A与B为任意两个集合．如果A不等势于B，但A等势于B的一个子集，则称A的基数小于B的基数，或B的基数大于A的基数，记作

$$\operatorname{card}A<\operatorname{card}B\quad\text{或}\quad\operatorname{card}B>\operatorname{card}A.$$

我们知道，当集合A等势于集合B的一个子集，哪怕是等势于B的一个真子集的时候，也并不排斥A与B等势．例如，试看第二

节例2中的偶数系 $\mathbb{E}$，我们有 $\mathbb{E}\sim\mathbb{E}$，$\mathbb{E}$ 是整数系 $\mathbb{Z}$ 的真子集．如果

$$\forall n\in\mathbb{Z},\ 令\ f(n)=2n,$$

则显然 f 是 $\mathbb{Z}$ 到 $\mathbb{E}$ 上的一个双一一函数，因此 $\mathbb{E}\sim\mathbb{Z}$.

当 A 等势于 B 的一个子集，特别地，当 A 是 B 的一个子集的时候，我们说 A 的基数小于或等于 B 的基数，或者说 B 的基数大于或等于 A 的基数，记作

$$\operatorname{card} A\leqslant\operatorname{card} B \quad 或 \quad \operatorname{card} B\geqslant\operatorname{card} A.$$

这样一来，施罗德-伯伦斯坦定理可简述如下：

$$\operatorname{card} A\leqslant\operatorname{card} B\wedge\operatorname{card} B\leqslant\operatorname{card} A\Rightarrow\operatorname{card} A=\operatorname{card} B.$$

定理(7.4)也可以叙述成如下形式：

$$\forall\ 集合偶(A,\ B),\ \operatorname{card} A\leqslant\operatorname{card} B\vee\operatorname{card} B\leqslant\operatorname{card} A;$$

这叫做基数或势的可比较性.

我们可以证明：

(7.19) 任何一个无穷集都包含着一个无穷可数子集.

由此推出，$\forall$ 无穷集 M，$\aleph_0\leqslant\operatorname{card} M$．换言之，自然数系 $\mathbb{N}$ 的基数是最小的超限数.

(7.20) **定义** 单位区间 $I=[0,\ 1]$ 的基数称为连续统的势，并用黑体字母 $\mathbf{c}$ 来表示：

$$\operatorname{card} I=\mathbf{c}.$$

我们知道，$\operatorname{card}\mathbb{R}=\mathbf{c}$．容易证明，任何非退化的区间都具有连续统的势．下面的定理对于决定 $\mathbb{I}$ 和 $\mathbb{T}$ 的基数是有用的.

(7.21) 如果 M 是无穷集，A 是可数集，并且 $M\cap A=\emptyset$，则

$$M\sim M\cup A.$$

援引(7.19)不难得到(7.21)的证明．由此立即看出：

$$\operatorname{card}\mathbb{I}=\mathbf{c},\quad \operatorname{card}\mathbb{T}=\mathbf{c}$$

顺便指出，(7.21)包含了戴德金-皮尔斯定理的必要性.

具有连续统的势的还有下列集合：$\mathbb{N}^\infty$, $\mathbb{R}^n$ $(n\in\mathbb{N})$, $\mathbb{R}^\infty$；由此推出，当

$$A_k\sim\mathbb{N}\quad(k=1,\ 2,\ \cdots,\ n,\ \cdots),$$
$$B_k\sim\mathbb{R}\quad(k=1,\ 2,\ \cdots,\ n,\ \cdots)$$

时，
$$\operatorname{card}\Big(\prod_{k=1}^{\infty}A_k\Big)=\operatorname{card}\Big(\prod_{k=1}^{n}B_k\Big)=\operatorname{card}\Big(\prod_{k=1}^{\infty}B_k\Big)=\mathbf{c}.$$

又 $\forall n\in\mathbb{N}$, 令

$$M_n=\{a_n,\ b_n\}\qquad(a_n\neq b_n);$$

则
$$\operatorname{card}\Big(\prod_{n=1}^{\infty}M_n\Big)=\mathbf{c};$$

特别地，$\{0,\ 1\}^\infty$ 具有连续统的势. 显然，$\aleph_0<\mathbf{c}$.

是否有集合 M, 其基数 $\operatorname{card}M=\boldsymbol{m}$ 介于 $\aleph_0$ 及 $\mathbf{c}$ 之间？ 即是否 $\exists\,\boldsymbol{m}\ni$・

$$\aleph_0<\boldsymbol{m}<\mathbf{c}\,?$$

这个问题称为连续统问题. 集合论的创始人康托尔(G. Cantor)曾推测不存在这样的基数 $\boldsymbol{m}$. 这就是集合论中著名的“连续统假设”. 自康托尔于1878年提出这个假设后，八十多年间，经过不少学者的努力，既无人证明，也无人推翻这个假设，使它成为数学中有名的难题之一. 首先，在1940年，哥德尔(K. Gödel)证明了连续统假设的和谐性，即在«集合论»的公理体系中加入连续统假设作为公理，不会因此引出互相矛盾的结果. 柯恒(P. J. Cohen)于1963年在此基础上，最后解决了这个问题：否定连续统假设的集合论公理体系也同样是和谐的. 换句话说，连续统假设独立于集合论的其他公理，也就是说，它不是其他公理的逻辑推论. 目前很多数学上的研究成果都是在承认选择公理和连续统假设的前提下获得的，并且这样的工作还在继续开展.

很自然地会提出这样的问题：连续统的势 $\mathbf{c}$ 是否就是最大的超限基数？答案是否定的. 事实上，不存在最大的超限数. 请看

下面的定理：

(7.22) **定理** 任何集合 A 决不能与它的幂集 $\mathscr{P}(A)$ 等势.

由于 A 总等势于 $\mathscr{P}(A)$ 的一个子集，因此对于任何集合 A，根据定理(7.22)，我们总有

$$\operatorname{card} A<\operatorname{card} \mathscr{P}(A),$$

可见不存在最大的超限数. 特别地，我们有

$$\operatorname{card} \mathscr{P}(\mathbb{R})>\mathbf{c}.$$

在第三节例 3 中我们证明了，当 A 是有限集，并且 $\operatorname{card} A=n$ 时，

$$\operatorname{card} \mathscr{P}(A)=2^n.$$

把这个事实推广到一般的集合，于是有下面的

(7.23) **定义** 设 A 是任意的集合，令 $\operatorname{card} A=\alpha$；则定义

$$\operatorname{card} \mathscr{P}(A)=2^\alpha.$$

$\mathscr{P}(A)$ 之所以称为 A 的幂集，原因就在这里.

可以证明：$\mathbf{c}=2^{\aleph_0}$. 于是连续统假设可以表述为：在 $\aleph_0$ 与 $2^{\aleph_0}$ 之间不存在任何基数.

关于基数的运算及序数① 均从略.

习　　题

I. 设 A、B、C 都是全集 $\mathscr{U}$ 的子集. 求证：

1. 1) $A\subset B \Leftrightarrow A\cap B=A$； 2) $A\subset B \Leftrightarrow A\cup B=B$.
2. $A\cap(B-C)=B\cap(A-C)=(A\cap B)-C=(A\cap B)-(A\cap C)$.
3. $B-A=B-(A\cap B)$.
4. $A\cap B=\emptyset \Leftrightarrow A\subset \complement B$.
5. $\complement(A-B)=B\cup\complement A$.

---

① 比如说，可参考 F. Hausdorff, Mengenlehre, 张良义、颜家驹译：《集论》，科学出版社，1960 年版.

6. $A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$.

7. $A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C)$.

8. $\mathscr{P}(A)\cap\mathscr{P}(B)=\mathscr{P}(A\cap B)$.

9. $\mathscr{P}(A)\cup\mathscr{P}(B)\subset\mathscr{P}(A\cup B)$.

II. 试证明命题(5.6)、(5.7)、(5.9)、(5.10)、(5.11) 2)、(5.13) 及(5.14).

III. 设 $X\neq\emptyset$, $Y\neq\emptyset$, $f:X\to Y$, 并设 A、A_1、A_2 是 X 的子集, B、B_1、B_2 是 Y 的子集; 又设

$$\forall i\in I,\ X_i\subset X;\quad \forall k\in K,\ Y_k\subset Y.$$

求证:

1. $f(A\cap f^{-1}(B))=f(A)\cap B$.

2. 1) $A_1\subset A_2\Rightarrow f(A_1)\subset f(A_2)$; 2) $f(A_2)-f(A_1)\subset f(A_2-A_1)$.

3. $f(\emptyset)=\emptyset$; $f^{-1}(\emptyset)=\emptyset$.

4. 若 f 是单函数, 则

   1) $A_1\neq A_2\Rightarrow f(A_1)\neq f(A_2)$; 2) $f(A_2)-f(A_1)=f(A_2-A_1)$.

5. 1) $B_1\subset B_2\Rightarrow f^{-1}(B_1)\subset f^{-1}(B_2)$; 2) $f^{-1}(B_1-B_2)=f^{-1}(B_1)-f^{-1}(B_2)$.

6. 设 f 是满函数; 则 $\mathscr{C}f(A)\subset f(\mathscr{C}A)$, 于此,

$$\mathscr{C}f(A)=Y-f(A),\ \mathscr{C}A=X-A.$$

   试举例说明当 f 不是满函数时, 可能既有

$$\mathscr{C}f(A)\not\subset f(\mathscr{C}A), \text{又有 } f(\mathscr{C}A)\not\subset\mathscr{C}f(A).$$

7. $f(\mathscr{C}\bigcap_{i\in I}X_i)=\bigcup_{i\in I}f(\mathscr{C}X_i)$.

8. $f^{-1}(\mathscr{C}\bigcap_{k\in K}Y_k)=\bigcup_{k\in K}\mathscr{C}f^{-1}(Y_k)$.

9. $f^{-1}(\mathscr{C}\bigcup_k Y_k)=\bigcap_k\mathscr{C}f^{-1}(Y_k)$.

IV. 设集合 $A\neq\emptyset$, 集合 $B\subset A$. 令 A 上的函数 φ_B 定义如下:

$$\forall x\in B,\ \varphi_B(x)=1;\ \forall x\in A-B,\ \varphi_B(x)=0.$$

那末, φ_B 称为(定义于) A 上关于集合 B 的特征函数. 设以 $Ch(A)$ 表示 A 上一切特征函数组成的集合. 求证:

1. $\mathscr{P}(A)\sim Ch(A)$, 从而 $\operatorname{card} Ch(A)>\operatorname{card} A$.

2. 设以黑体字母 $\boldsymbol{f}$ 表示区间[0, 1]上所有实值函数所成集合 Φ 的基数:

$$\operatorname{card}\Phi=\boldsymbol{f};$$

那末 f 大于连续统的势 c：$f>c$.

3．对于任何非退化的区间 I（包括实数系 $\mathbf{R}$ 在内），如果以 Φ_I 表示 I 上一切实值函数所成的集合，则

$$\operatorname{card}\Phi_I=f.$$

4．设 I 与 J 表示任意两个非退化的区间．那末，

$$1)\ Ch(I)\sim Ch(J);\quad 2)\ \operatorname{card}Ch(I)=2^c.$$

5．令 I 表示任何非退化的区间，又 $\forall t\in I$，令 $E_t=\{0,1\}$；那末

$$\prod_{t\in I}E_t\sim\mathscr{P}(\mathbf{R}),$$

从而

$$\operatorname{card}\prod_{t\in I}E_t=2^c.$$

6．$f=2^c$.

第一章　拓扑空间

本章将论述拓扑空间、拓扑的基与亚基、拓扑空间到拓扑空间内的连续函数、子空间、积空间与商空间. 为了读者便于掌握本章的内容起见，我们先从特殊的拓扑空间——度量空间入手，并最后回到度量空间去，论述等价度量与度量积以及一维欧氏空间的一些特殊点集.

一、度量空间

1. n维欧几里得空间　由于度量空间是n维欧几里得空间(简称n维欧氏空间)$\mathbb{R}^n$的推广，我们就先来定义n维欧氏空间$\mathbb{R}^n$. 在预篇的例9中，记号$\mathbb{R}^n$表示所有实的n数组

$$x=(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n),\ y=(y_1,\ y_2,\ \cdots,\ y_n),$$
$$z=(z_1,\ z_2,\ \cdots,\ z_n),\ \cdots$$

所成的集合. 如果对于这个集合的任意两个元素x与y(不必不同)，我们定义

$$d(x,y)=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2}$$

为它们之间的距离，则$(\mathbb{R}^n,\ d)$就叫做n维欧氏空间，$\mathbb{R}^n$的每个元素都叫做空间$(\mathbb{R}^n,\ d)$的点，d叫做$\mathbb{R}^n$上的欧氏度量或欧氏距离函数. n维欧氏空间$(\mathbb{R}^n,\ d)$我们也不妨就简单地记作$\mathbb{R}^n$.

显而易见，欧氏空间$\mathbb{R}^1$(也可以写成$\mathbb{R}$)就是实轴或实(数)直线，欧氏空间$\mathbb{R}^2$与$\mathbb{R}^3$分别为坐标平面与坐标空间. $\forall n\in\mathbb{N}$，d是$\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$上的实值函数：

$$d: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}.$$

我们有：

1° d 的非负性：$d(x, y) \geqslant 0$；

2° 恒等定律：$d(x, y)=0 \Leftrightarrow x=y$；

3° 对称定律：$d(x, y)=d(y, x)$；

4° 三角形不等式：$d(x, z) \leqslant d(x, y)+d(y, z)$.

根据欧氏度量 d 的定义，性质 1°、2°、3° 的真实性是显而易见的．当 $n \leqslant 3$ 时，三角形不等式也显然成立．我们去证明，在任意的 n 维欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 中，三角形不等式总成立．

令 $u_i=x_i-z_i$, $v_i=x_i-y_i$, $w_i=y_i-z_i$. 于是 $u_i=v_i+w_i$. 因此三角形不等式 4° 就是不等式

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(v_i+w_i)^2} \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n} v_i^2}+\sqrt{\sum_{i=1}^{n} w_i^2}. \tag{1}$$

但这不是别的，正好是闵可夫斯基(Minkowski)不等式．

为了证明这个不等式，我们看出，不等式(1)与下面的不等式

$$\sum_{i=1}^{n}(v_i+w_i)^2 \leqslant \sum_{i=1}^{n} v_i^2+\sum_{i=1}^{n} w_i^2+2 \sqrt{\sum_{i=1}^{n} v_i^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n} w_i^2}$$

等价，亦即与不等式

$$\sum_{i=1}^{n} v_i w_i \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n} v_i^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n} w_i^2} \tag{2}$$

等价．当 $\sum_{i=1}^{n} v_i w_i \leqslant 0$ 时，不等式(2)显然成立，从而闵可夫斯基不等式成立．当 $\sum_{i=1}^{n} v_i w_i>0$ 时，不等式(2)与不等式

$$\left(\sum_{i=1}^{n} v_i w_i\right)^2 \leqslant \sum_{i=1}^{n} v_i^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} w_i^2 \tag{3}$$

等价．不等式(2)与(3)都叫做柯西-许瓦尔茨(Cauchy-Schwarz)不等式．剩下的是去证明不等式(3)成立．

令 $$V=\sum_{i=1}^{n} v_i^2, \quad W=\sum_{i=1}^{n} w_i^2, \quad U=\sum_{i=1}^{n} v_i w_i.$$

那末，含 s、t 的二次型

$$Vs^2+2Ust+Wt^2=\sum_{i=1}^{n}(v_is+w_it)^2$$

决不能为负. 因此系数 V、U、W 必须满足不等式

$$VW-U^2\geqslant 0.$$

这就证明了不等式(3)，从而三角形不等式 4° 得证.

2. 度量空间 在前一款里我们已经提到"度量空间"是 n 维欧氏空间的推广. 因此，很自然地，度量空间通常定义为一个非空集合 X 及一个实值函数 $d: X\times X\to\mathbb{R}$，使对于任意的 x、y、$z\in X$，条件 1°—4° 都满足，于此条件 1°—4° 称为**度量公理**. 下面的定义告诉我们，只须对三角形不等式在形式上略作更改，度量公理的个数可以大为削减. 为了避免行文冗赘起见，以后都假定集合 $X\neq\emptyset$.

(1.1) **定义** 设 x、y、z…是集合 X 的元素(它们不必两两相异). 如果存在着函数 $d: X\times X\to\mathbb{R}$，满足下面的两个度量公理:

M 1. 恒等定律: $d(x, y)=0\Leftrightarrow x=y$;

M 2. 三角形不等式: $d(x, z)\leqslant d(x, y)+d(z, y)$;

那末，(X, d) 叫做一个**度量空间**，d 叫做 X 上的**度量**或**距离函数**，X 的所有元素都叫做度量空间 (X, d) 的点，$d(x, y)$ 叫做两点 x 与 y 之间的距离，X 的任何子集都叫做空间 (X, d) 的**点集**.

当不致产生误解时，我们不妨把度量空间 (X, d) 简单地写成 X，而且我们约定

$$x\in(X, d)\Leftrightarrow x\in X.$$

我们去证明，对于一个固定的集合 X 及函数 $d: X\times X\to\mathbb{R}$,

公理体系 1°—4° $\Leftrightarrow$ 公理体系 M 1—2.

1°—4° $\Rightarrow$ M 1—2 是显而易见的. 为了证明反过来，M 1—2 $\Rightarrow$ 1°—

4°，我们只须证明下面的两个命题在公理 M1—2 之下为真：

(1.2) $\forall(x, y)\in X\times X$，总有 $d(x, y)\geqslant 0$. 换句话说，度量 d 是 $X\times X$ 上的一个非负实值函数.

证 根据 M2，我们有

$$d(x, x)\leqslant d(x, y)+d(x, y)=2d(x, y)$$

但是根据 M1，$d(x, x)=0$. 因此，

$$d(x, y)\geqslant 0. \quad \rule{0.5em}{1em}$$

(1.3) 对称定律成立：$d(x, y)=d(y, x)$.

证 由 M2 推出

$$d(x, y)\leqslant d(x, x)+d(y, x).$$

由此，根据 M1，我们得到

$$d(x, y)\leqslant d(y, x). \tag{4}$$

同理，由

$$d(y, x)\leqslant d(y, y)+d(x, y)$$

及
$$d(y, y)=0,$$

推出
$$d(y, x)\leqslant d(x, y). \tag{5}$$

从(4)与(5)立即得到

$$d(x, y)=d(y, x). \quad \rule{0.5em}{1em}$$

三角形不等式 4° 是公理 M2 及命题(1.3)的直接推论：

(1.4) 对于(X, d)中的任意三个点 x、y、z（不必两两相异），总有

$$d(x, z)\leqslant d(x, y)+d(y, z).$$

由此可见，公理体系 1°—4° 与公理体系 M1—2 等价.

例 1 款 1 中定义的 n 维欧氏空间$(\mathbb{R}^n, d)$，对于每个固定的自然数 n 都是一个度量空间.

例 2 对于任意给定的一个自然数 n，我们可以定义距离函数

$d_0: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 如下：

$$d_0(x, y) = \begin{cases} 0 & (x = y), \\ 1 & (x \neq y). \end{cases}$$

公理 M1—2显然适合，于是得到一个度量空间$(\mathbb{R}^n, d_0)$，它不同于 n 维欧氏空间$(\mathbb{R}^n, d)$.

一般说来，对于任意的集合 X，以及任意的 $(x, y) \in X \times X$，定义 $d_0(x, y)$如上面的例 2，于是得到一个度量空间(X, d_0)，称为**离散度量空间**，d_0 称为 X 上的**离散度量**.

按照上面的定义，$\forall n$，例 2 中的度量空间$(\mathbb{R}^n, d_0)$都是离散的.

例 3 $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$，令

$$d_1(x, y) = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i - y_i|.$$

如此，恒等定律 M1 显然满足. 设

$$|x_{i_0} - z_{i_0}| = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i - z_i|,$$

则 $d_1(x, z) = |x_{i_0} - z_{i_0}| \leqslant |x_{i_0} - y_{i_0}| + |z_{i_0} - y_{i_0}|$

$$\leqslant d_1(x, y) + d_1(z, y).$$

因此，三角形不等式 M2 也满足. 所以 $\forall n$，$(\mathbb{R}^n, d_1)$都是一个度量空间.

例 4 $\forall n \in \mathbb{N}$，当 $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ 时，令

$$d_2(x, y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|,$$

则恒等定律 M1 显然成立. 又由

$$|x_i - z_i| \leqslant |x_i - y_i| + |z_i - y_i|,$$

立即推出 $$\sum_{i=1}^{n} |x_i - z_i| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| + \sum_{i=1}^{n} |z_i - y_i|.$$

所以三角形不等式 M2 也成立：

$$d_2(x, z) \leqslant d_2(x, y) + d_2(z, y).$$

可见$(\mathbb{R}^n, d_2)$也是一个度量空间.

由以上四个例子看出，对于一个给定的 n，基于同一个集合 $X=\mathbb{R}^n$，我们由于度量选择的不同，得到四个互不相同的度量空间：

$$(\mathbb{R}^n, d)\text{及}(\mathbb{R}^n, d_i),\ i=0,\ 1,\ 2.$$

例5 令

$$X=C([a, b])=\{f:[a, b]\to\mathbb{R}\,|\,f\text{ 在 }[a, b]\text{上连续}\},$$

并且对于任意的 $f, g\in C([a, b])$，令

$$d(f, g)=\int_a^b|f(x)-g(x)|dx.$$

当 $f=g$ 时，显然 $d(f, g)=0$. 反之，若 $f\neq g$，则由 $|f(x)-g(x)|$ 的连续性看出，必有非退化的区间 $J\subset[a, b]$ 使得 $|f(x)-g(x)|$ 在 J 上大于零，从而

$$d(f, g)=\int_a^b|f(x)-g(x)|dx\geqslant\int_J|f(x)-g(x)|dx>0,$$

因此恒等定律 M1 满足．三角形不等式 M2 直接由下面的不等式推出：

$$|f(x)-h(x)|\leqslant|f(x)-g(x)|+|h(x)-g(x)|.$$

因此，$(C([a, b]), d)$是一个度量空间．在这里，我们给出了一个函数空间的例子．

例6 希尔伯特(Hilbert)空间 令

$$H^\omega=\{x=\{x_n\}\in\mathbb{R}^\infty\,\Big|\,\sum_{n=1}^{\infty}x_n^2\text{ 收敛}\}.$$

$\forall k\in\mathbb{N}$，从闵可夫斯基不等式

$$\left[\sum_{i=1}^{k}(x_i-y_i)^2\right]^{\frac{1}{2}}\leqslant\left[\sum_{i=1}^{k}x_i^2\right]^{\frac{1}{2}}+\left[\sum_{i=1}^{k}(-y_i)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

看出，当 $x=\{x_n\}\in H^\omega$，$y=\{y_n\}\in H^\omega$ 时，必有 $\{x_n-y_n\}\in H^\omega$；亦即级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(x_n-y_n)^2$ 收敛．令

$$d(x, y)=\left[\sum_{n=1}^{\infty}(x_n-y_n)^2\right]^{\frac{1}{2}}.$$

如此，显然公理 M1 满足．令 $z=\{z_n\}\in H^{\omega}$．$\forall n\in\mathbb{N}$，由闵可夫斯基不等式，我们有

$$\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i-z_i)^2\right]^{\frac{1}{2}}=\left[\sum_{i=1}^{n}\{(x_i-y_i)+(y_i-z_i)\}^2\right]^{\frac{1}{2}}$$
$$\leqslant\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2\right]^{\frac{1}{2}}+\left[\sum_{i=1}^{n}(z_i-y_i)^2\right]^{\frac{1}{2}}.$$

因此，取极限，我们有

$$d(x, z)\leqslant d(x, y)+d(z, y).$$

这样一来，公理 M2 也满足．所以 (H^{ω}, d) 是一个度量空间，称为希尔伯特空间，它也可以简单地用记号 H^{ω} 来表示．

二、度量空间的开集·度量子空间

1．开球·收敛点列　为了定义度量空间 (X, d) 的"开集"，我们首先给出"开球"的定义如下：

(2.1)　**定义**　设 a 是度量空间 (X, d) 中的任意一点，δ 是任意给定的正实数．令

$$B(a, \delta)=\{x\in X\,|\,d(a, x)<\delta\}.$$

那末，$B(a, \delta)$ 叫做度量空间 (X, d) 中以 a 为中心、δ 为半径的开球或球形邻域．开球 $B(a, \delta)$ 又叫做 (X, d) 中点 a 的 δ-邻域．若将 $B(a, \delta)$ 中的 $\delta>0$ 换成 $\varepsilon>0$，则所得开球 $B(a, \varepsilon)$ 称为点 a 的 ε-邻域．

例 7　当 $X=\mathbb{R}^1$ 时，$B(a, \delta)=\ ]a-\delta, a+\delta[$．当 $X=\mathbb{R}^2$ 时，$B(a, \delta)$ 是坐标平面上以 a 为中心、δ 为半径的圆的内部区域，即开圆．当 $X=\mathbb{R}^3$ 时，$B(a, \delta)$ 是三维欧氏空间中以 a 为中心、δ 为半

径的开球．以上所涉及的度量当然都是欧氏度量．

例 8 试看度量空间$(\mathbb{R}^2, d_1)$，于此d_1为例3中所定义的度量．不难看出，空间$(\mathbb{R}^2, d_1)$中的开球$B(a, \delta)$在坐标平面上的图形是以点a为心、边长为2δ的正方形的内部区域，这个正方形的边平行于坐标的两个轴．

例 9 在离散度量空间(X, d_0)中，当$\delta\leqslant 1$时，

$$B(a, \delta)=\{a\},$$

而当$\delta>1$时，

$$B(a, \delta)=X.$$

我们很容易把收敛数列的概念推广到一个随意的度量空间(X, d)中去．

(2.2) **定义** 度量空间(X, d)中的点列

$$\{a_n\}\text{收敛} \Leftrightarrow \exists a\in X\ni\cdot\forall\varepsilon>0,\ \exists N\in\mathbb{N}\ni\cdot$$
$$\forall n>N,\ d(a, a_n)<\varepsilon.$$

此时点a称为点列$\{a_n\}$的一个极限．当点列$\{a_n\}$以a为极限时，我们记作

$$\lim_{n\to\infty} a_n=a.$$

此时我们又说：点列$\{a_n\}$收敛于a．$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a$也简记作

$$\lim_n a_n=a \quad \text{或} \quad \lim a_n=a.$$

在下面，度量空间(X, d)将简写成X．显而易见：

(2.3) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0,\ \exists N\ni\cdot n>N\Rightarrow a_n\in B(a, \varepsilon)$.

(2.4) 度量空间X中的每个收敛序列都只有唯一的一个极限．

证 设X中的序列$\{a_n\}$收敛于两个不同的极限a与a'：

$$\lim_{n\to\infty} a_n=a,\quad \lim_{n\to\infty} a_n=a',\quad a\neq a'$$

则由 M1 及(1.2)推出，$d(a, a')>0$. 令 $\varepsilon=\frac{1}{2}d(a, a')$. 因为 $\lim_n a_n=a$, 所以由(2.3)看出，$B(a, \varepsilon)$包含几乎所有的 a_n. 但由 M2 看出，$B(a, \varepsilon)\cap B(a', \varepsilon)=\emptyset$, 于是 $B(a', \varepsilon)$ 最多只能包含有限多个 a_n. 这与 $\lim_n a_n=a'$ 矛盾. ▮

由度量空间 X 中球形邻域的定义可知：对于每个 $\delta>0$, 空间 X 的每个点 a 都有一个球形邻域 $B(a, \delta)$, 而且 $B(a, \delta)$包含点 a. 我们进而证明下面的

(2.5) **定理** 设 a_1、$a_2\in X$, $\delta_1>0$, $\delta_2>0$.

$$a\in B(a_1, \delta_1)\cap B(a_2, \delta_2)\Rightarrow\exists\,\delta>0\ni\cdot$$
$$B(a, \delta)\subset B(a_1, \delta_1)\cap B(a_2, \delta_2).$$

证 令 $\varepsilon_i=\delta_i-d(a_i, a)$, $\delta=\min(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$. 于是，

$$x\in B(a, \delta)\Rightarrow d(a, x)<\delta\leqslant\varepsilon_i=\delta_i-d(a_i, a),\ (i=1, 2)$$
$$\Rightarrow d(a_i, x)\leqslant d(a_i, a)+d(a, x)<\delta_i(i=1, 2)$$
$$\Rightarrow x\in B(a_1, \delta_1)\cap B(a_2, \delta_2).$$ ▮

在定理(2.5)中，我们并不排斥 $a_1=a_2$, 也不排斥 $a_1=a_2\wedge\delta_1=\delta_2$. 由此可见：

(2.6) **系** 设 $B(a, \delta)$为度量空间 X 的任意开球. 那末，

$$x\in B(a, \delta)\Rightarrow\exists\,\delta_x>0\ni\cdot B(x, \delta_x)\subset B(a, \delta).$$

(2.7) **定义** 设 U 是度量空间 X 的一个点集. 如果对于每个点 $x\in U$, 总 $\exists\,\delta_x>0\ni\cdot B(x, \delta_x)\subset U$, 那末，$U$ 就叫做度量空间 X 的一个开集. 这时，我们也说，点集 U 开于 X 中.

由(2.6)和定义(2.7)我们看出，度量空间 X 中的任何开球 $B(a, \delta)$都是空间 X 的开集.

(2.8) **定理** 度量空间 X 的开集具有下列性质：

1° 空集 $\emptyset$ 是空间 X 的开集；

2° 点集 X 是空间 X 的开集；

3° 空间 X 的任意两个开集的交集是空间 X 的开集.

4° 空间 X 中任意开集族 $\{U_i\}_{i\in I}$ 的并集 $\bigcup_{i\in I} U_i$ 是空间 X 的开集.

证 性质 2° 与 4° 是显而易见的. 性质 1° 也可以直接由开集的定义(2.7)推出. 事实上,如果空集 $\emptyset$ 不是开集,则必有一点 $a\in\emptyset$, 使对于任意的 $\delta>0$, 总有 $B(a, \delta)\not\subset\emptyset$. 这与空集的定义矛盾.

为了证明性质 3°, 设 U 及 V 为空间 X 的开集, 并设 a 为交集 $U\cap V$ 中随意一点. 那末,必有

$$\delta_1>0 \text{ 及 } \delta_2>0, \quad \text{s.t. } B(a, \delta_1)\subset U, \quad B(a, \delta_2)\subset V.$$

于是根据定理(2.5), $\exists\,\delta>0 \ni\cdot$

$$B(a, \delta)\subset B(a, \delta_1)\cap B(a, \delta_2)\subset U\cap V.$$

因此,根据定义(2.7), $U\cap V$ 是空间 X 的开集. ∎

应用数学归纳法我们容易证明:

(2.9) 空间 X 的任意有限个开集的交集开于 X 中.

例 10 离散度量空间(X, d_0)的任何点集都是空间(X, d_0)的开集. 事实上,从例 9 看出,空间(X, d_0)的任何单元点集$\{a\}$都是空间(X, d_0)的开集. 于是根据定理(2.8)中的性质 4°, 可知空间(X, d_0)的任何点集都是开集.

例 11 在实直线 $\mathbb{R}^1$ 中,显然每个开区间都开于 $\mathbb{R}^1$ 中. 但当 $a<b$ 时,半开区间 $[a, b[$ 不是 $\mathbb{R}^1$ 的开集,因为

$$\forall\,\delta>0,\ B(a, \delta)=\ ]a-\delta, a+\delta[\ \not\subset [a, b[.$$

同理,闭区间$[a, b]$也不是 $\mathbb{R}^1$ 的开集.

(2.10) **定义** 设 a 是度量空间 X 的一个点, N_a 是 X 的一个点集. 如果

$$\exists\,\delta>0 \ni\cdot B(a, \delta)\subset N_a,$$

那末, N_a 就叫做空间 X 中点 a 的一个邻域.

由此可见，点 a 的任何邻域 N_a 必须包含点 a：$a\in N_a$；另一方面，包含点 a 的任何开集，特别地，以 a 为中心的任何开球，都是点 a 的邻域，这样的邻域称为空间 X 中点 a 的开邻域．但是，点 a 的邻域可以不必是空间 X 的开集．例如在例 11 中已指出，闭区间 $[a-\delta,\ a+\delta]$ 不是实直线 $\mathbb{R}^1$ 的开集，但却是 $\mathbb{R}^1$ 中点 a 的邻域；这是因为

$$B(a,\ \delta)=\ ]a-\delta,\ a+\delta[\ \subset[a-\delta,\ a+\delta].$$

从定义(2.7)、定义(2.10)及命题(2.3)我们立即得到下面的两个命题：

(2.11) 点集 U 开于度量空间 X 中 $\Leftrightarrow \forall a\in U,\ \exists N_a \ni\cdot N_a\subset U$.

(2.12) $\lim a_n=a \Leftrightarrow \forall N_a,\ \exists N\in\mathbb{N},\ \ni\cdot n>N \Rightarrow a_n\in N_a$.

关于闭集、闭包以及其他的基本“拓扑概念”将留待下一节中去讨论．

2. 度量子空间 设 A 是度量空间 $(X,\ d)$ 的一个非空点集．由定义(0.4.10)、(0.4.11)及(0.4.15)立即看出，函数 d 在 $A\times A$ 上的限制 $d|A\times A$ 是 $A\times A$ 到 $X\times X$ 内的内射函数 i 与函数 d 的复合函数：$d|A\times A=di$．$A\times A$ 上的实值函数 di 显然满足公理 M1 与 M2．因此，$(A,\ di)$ 是一个度量空间．

(2.13) **定义** 度量空间 $(A,\ di)$ 叫做度量空间 $(X,\ d)$ 的一个度量子空间，或简称为 (X,d) 的一个子空间；(X,d) 叫做 (A,di) 的母空间．子空间 $(A,\ di)$ 的开集，称为相对地开于 $(A,\ di)$ 中．

正如可将度量空间 $(X,\ d)$ 简写成 X 一样，它的任何子空间 $(A,\ di)$ 也可以简写成 A，并且 A 上的度量 di 也不妨简写成 d．

(2.14) **定理** 设 A 是度量空间 X 的一个子空间．A 的子集 G 相对地开于 A 中 $\Leftrightarrow \exists U$ 开于 X 中 $\ni\cdot$

$$G = A \cap U. \tag{6}$$

证 易知子空间 A 中以它的一点 a 为中心，$\delta>0$ 为半径的开球 $B_A(a, \delta) = A \cap B(a, \delta)$，这里 $B(a, \delta)$ 是空间 X 中的开球.

设 G 相对地开于子空间 A 中. 由定义(2.7)可知，对于任意的一点 $x \in G$，$\exists \delta_x > 0$，$\ni \cdot B_A(x, \delta_x) \subset G$. 由此，并鉴于 $x \in B_A(x, \delta_x)$，可见

$$G = \bigcup_{x \in G} B_A(x, \delta_x).$$

因为 $$B_A(x, \delta_x) = A \cap B(x, \delta_x),$$

所以根据(0.5.9)，

$$G = A \cap \left(\bigcup_{x \in G} B(x, \delta_x)\right).$$

令 $U = \bigcup_{x \in G} B(x, \delta_x)$. 由于所有的 $B(x, \delta_x)$ 都开于 X 中，根据定理(2.8)中的 4°，可见 U 是空间 X 的开集，并且(6)式成立.

反之，设 $G \subset A$，且 $\exists X$ 的开集 U 使得(6)式成立. 任取一点 $a \in G$，则 $a \in U$. 因为 U 是空间 X 的开集，所以 $\exists \delta > 0$, s. t. $B(a, \delta) \subset U$. 由此可见，

$$B_A(a, \delta) = A \cap B(a, \delta) \subset A \cap U = G.$$

因此，根据定义(2.7)，G 相对地开于 A 中. ▌

由此可见，子空间的开集不必也是母空间的开集.

例 12 在一维欧氏空间 $\mathbb{R}^1$ 中，考虑子空间 $A = [a, b[$，$a<b$；则见点集 A 相对地开于子空间 A 中，但它不是 $\mathbb{R}^1$ 的开集.

下面的命题是定理(2.14)的直接推论.

(2.15) **系** 要使子空间 A 的每个开集也同时是母空间 X 的开集，必要而且充分的是，点集 A 开于空间 X 中.

三、拓扑空间·拓扑的基与亚基

从本章的第一节我们看出，度量空间概括了相当广泛的一类

空间，因而它的应用也是广泛的．然而度量空间却不能包括象射影空间等这类空间，因为它们中的两点之间的距离无定义．因此，把度量空间的概念加以推广是完全必要的．在推广后所得的空间中，我们要求能定义序列的收敛性和函数的连续性，而它们又必须是《数学分析》中相应概念的推广．这样，我们就得到"拓扑空间"的概念．

有若干彼此等价的刻划"拓扑空间"的公理体系可供我们选择，于其中我们选择了将在下面提到的一组"开集公理"，并以前一节的内容，特别是以定理(2.8)中 1°—4° 这四个开集的性质的引入为先导，使对这组"开集公理"的选择应当不致引起读者感到突然和不易理解．

1．开集公理 设 $\mathscr{T}$ 是集合 X 的某些子集组成的一个类，使得下面的两个公理满足：

T1． 属于 $\mathscr{T}$ 的集合的任何有限交属于 $\mathscr{T}$；

T2． 属于 $\mathscr{T}$ 的集合的任意并属于 $\mathscr{T}$．

那末，$\mathscr{T}$ 就叫做 X 上的一个**拓扑**，$(X, \mathscr{T})$ 叫做一个**拓扑空间**；$\mathscr{T}$ 的每个元素都叫做拓扑空间 $(X, \mathscr{T})$ 的一个**开集**，或说它**开于拓扑空间** $(X, \mathscr{T})$ **中**，或说它**关于拓扑** $\mathscr{T}$ **是开的**．这时集合 X 的每个元素都叫做拓扑空间 $(X, \mathscr{T})$ 的一个**点**，X 的每个子集都叫做拓扑空间 $(X, \mathscr{T})$ 的一个**点集**．公理 T1 与 T2 称为**开集公理**．

当所涉及的只有 X 上的一个拓扑 $\mathscr{T}$，因而不致产生混淆时，我们也可以把 X 称为一个拓扑空间或空间．

由上所述，开集公理 T1 与 T2 可以重新表述如下：

1° 拓扑空间 $(X, \mathscr{T})$ 的开集的任何有限交仍然是空间 $(X, \mathscr{T})$ 的开集．

2° 拓扑空间 $(X, \mathscr{T})$ 的任何开集族的并集都是空间

$(X, \mathscr{T})$的开集.

(3.1) 对于任何拓扑空间$(X, \mathscr{T})$，空集$\emptyset$与点集X都是空间$(X, \mathscr{T})$的开集.

证 取拓扑$\mathscr{T}$中元素的空族$\{U_i\}_{i\in\emptyset}$. 根据(0.5.5)，我们有$\bigcup_{i\in\emptyset}U_i=\emptyset$, $\bigcap_{i\in\emptyset}U_i=X$. 于是由公理T1与T2看出，$X\in\mathscr{T}$, $\emptyset\in\mathscr{T}$. ▌

设(X, d)为任一度量空间，$\mathscr{T}_d$是它的所有开集组成的类；则由(2.9)及定理(2.8)中的性质4°看出，$\mathscr{T}_d$是X上的一个拓扑.

(3.2) **定义** 对于任意的度量空间(X, d)，如上所得的X上的拓扑$\mathscr{T}_d$叫做由度量d所导致的拓扑. 于是度量空间(X, d)转化成一个拓扑空间$(X, \mathscr{T}_d)$. 反之，设$(X, \mathscr{T})$为任意给定的一个拓扑空间；如果存在着X上的一个度量d，使得由d所导致的拓扑$\mathscr{T}_d$与已知拓扑$\mathscr{T}$相同：$\mathscr{T}_d=\mathscr{T}$，那末，拓扑空间$(X, \mathscr{T})$就称为可度量化.

在本章开头处我们曾谈到度量空间是特殊的拓扑空间，就指的是凡是度量空间(X, d)都可以转化成拓扑空间$(X, \mathscr{T}_d)$，其中的拓扑$\mathscr{T}_d$为度量d所导致.

特别地，任何n维欧氏空间$\mathbb{R}^n$都是一个拓扑空间，其中的拓扑为n维欧氏度量所导致，称之为$\mathbb{R}^n$上的自然拓扑或欧氏拓扑.

函数空间$C([a, b])$及希尔伯特空间H^ω都可转化成拓扑空间，或者说，它们都是拓扑空间.

例13 对于任意的集合X，它的幂集$\mathscr{P}(X)$显然是X上的一个拓扑，称为X上的离散拓扑. 拓扑空间$(X, \mathscr{P}(X))$称为离散空间. 于是离散空间的每个点集都是开集. 令$\mathscr{T}_1=\{\emptyset, X\}$，那末，$\mathscr{T}_1$显然也是$X$上的一个拓扑. 于是对于同一个集合$X$，我们得到两个拓扑空间$(X, \mathscr{P}(X))$与$(X, \mathscr{T}_1)$. 当$X$不是单元集时，这两个空间显然不同.

例14 令

$$X=\{0, 1\},\quad \mathscr{T}_s=\{X, \emptyset, \{0\}\}.$$

显然 $\mathscr{T}_s$ 是 X 上的一个拓扑. 拓扑空间 $(X, \mathscr{T}_s)$ 称为西尔宾斯基(W. Sierpiński)空间. 如果令

$$\mathscr{T}_{s'}=\{X, \emptyset, \{1\}\},$$

则得另一个西尔宾斯基空间$(X, \mathscr{T}_{s'})$. 我们看出, 从同一集合 $X=\{0, 1\}$, 我们可以构作四个拓扑:

$$\mathscr{P}(X),\ \mathscr{T}_s,\ \mathscr{T}_{s'} \text{ 及 } \mathscr{T}_1=\{\emptyset, X\}.$$

十分明显, 任何离散度量空间(X, d_0)所转化的拓扑空间$(X, \mathscr{T}_{d_0})$是一个离散拓扑空间$(X, \mathscr{P}(X))$: $\mathscr{T}_{d_0}=\mathscr{P}(X)$. 反之, 任何离散拓扑空间$(X, \mathscr{P}(X))$都可以用 X 上的度量 d_0 度量化(d_0 的定义见例 2).

(3.3) **定义** 如果拓扑空间$(X, \mathscr{T})$的点集 X 是有限集, 则空间$(X, \mathscr{T})$称为**有限的**, 否则空间$(X, \mathscr{T})$称为**无穷的**.

(3.4) **定理** 有限拓扑空间$(X, \mathscr{T})$可度量化的必要而且充分的条件是: 空间$(X, \mathscr{T})$是离散的.

证 充分性为已知, 所以只须证明条件的必要性. 设 X 由 n 个点所组成:

$$X=\{x_1, x_2, \cdots, x_n\},$$

并设 X 上存在度量 d, 使得由 d 所导致的拓扑 $\mathscr{T}_d=\mathscr{T}$. 令

$$\varepsilon=\min_{i\neq k} d(x_i, x_k).$$

那末, 显而易见, $\varepsilon>0$, 并且对于每个不大于 n 的自然数 i, 开球 $B(x_i, \varepsilon)$ 为单元集 $\{x_i\}$: $B(x_i, \varepsilon)=\{x_i\}$. 这是因为, 当自然数 $k\leqslant n$, $k\neq i$ 时, $d(x_i, x_k)\geqslant\varepsilon$, 从而 $x_k\notin B(x_i, \varepsilon)$. 由此可见, 每个单元集 $\{x_i\}$ 都是度量空间 (X, d) 的开集, 因此根据定理 (2.8), $\mathscr{T}_d=\mathscr{P}(X)$, 亦即 $\mathscr{T}=\mathscr{P}(X)$. ▮

由定理(3.4)看出，当 $X=\{0, 1\}$ 时，西尔宾斯基空间 $(X, \mathscr{T}_s)$ 及 $(X, \mathscr{T}_{s'})$ 都不可以度量化.

当空间 $(X, \mathscr{T})$ 为无穷时，空间 $(X, \mathscr{T})$ 可度量化的问题要比空间为有限的情形复杂得多. 这留待以后讨论.

例 15 我们现在去举例说明，开集的无穷交不一定是开集. 首先在实直线 $\mathbb{R}^1$ 中，任何单元集都不是开集. 事实上，设 $a\in\mathbb{R}^1$；则对于任何

$$\delta>0,\ ]a-\delta,\ a+\delta[\not\subset\{a\}.$$

设 n 表示任意的自然数；则见

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}]a-\frac{1}{n},\ a+\frac{1}{n}[=\{a\}.$$

这说明在 $\mathbb{R}^1$ 中，所有开集 $]a-\frac{1}{n},\ a+\frac{1}{n}[\quad(n=1,\ 2,\ \cdots)$ 的交集不是开集.

2. 拓扑的基与亚基 从度量空间 (X, d) 的开集的定义(2.7)看出，空间 (X, d) 的每个开集都由开球所确定. 事实上，任何开集都可以表示成一族开球的并集，从而构造出由度量 d 所导致的拓扑 $\mathscr{T}_d$. 把这个事实予以推广，我们就得到拓扑的基的概念.

(3.5) **定义** 设 $\mathscr{T}$ 是集合 X 上的一个拓扑，$\mathscr{B}\subset\mathscr{T}$. 如果

$$\forall U\in\mathscr{T},\ \exists\text{一个}\ \mathscr{B}\ \text{的元素族}\ \{V_\alpha\}\ni\cdot U=\bigcup_\alpha V_\alpha,$$

那末，$\mathscr{B}$ 就叫做拓扑 $\mathscr{T}$ 或拓扑空间 $(X, \mathscr{T})$ 的一个基. 设 $\mathscr{B}^*\subset\mathscr{T}$. 如果 $\mathscr{B}^*$ 中元素的所有有限交组成拓扑 $\mathscr{T}$ 的一个基，那末，$\mathscr{B}^*$ 就叫做拓扑 $\mathscr{T}$ 或拓扑空间 $(X, \mathscr{T})$ 的一个亚基①.

① subbase 一词除译成亚基外，也有译成子基的. 不过依本书作者的意见，"子基"这一译名值得商榷. 因为子集是集，子空间是空间，子群是群，于是容易使人连想到子基也是拓扑的基. 但其实则不尽然. 所以除亚基这一译名外，倘需另译，则不如译成"次基".

显然当 $\mathscr{B}^*=\emptyset$ 时，相应的 $\mathscr{T}=\{\emptyset, X\}$.

由此可见，度量空间(X, d)中一切开球所组成的集合 $\mathscr{B}$ 是由度量 d 所导致的拓扑 $\mathscr{T}_d$ 的一个基.

(3.6) **定理** 设$(X, \mathscr{T})$是一个拓扑空间，并设 $\mathscr{B}\subset\mathscr{T}$. $\mathscr{B}$ 为拓扑$\mathscr{T}$的一个基$\Leftrightarrow \forall U\in\mathscr{T}\wedge\forall x\in U, \exists W_x\in\mathscr{B}\ni x\in W_x\subset U$.

证 $\Rightarrow$. 如果 $U=\emptyset$，则条件当然成立. 设 $U\neq\emptyset$, $x\in U$. 由于 $\mathscr{B}$ 是 $\mathscr{T}$ 的基，因而

$$\exists\{V_\alpha\}_{\alpha\in A}, \text{ s. t. } \forall\alpha\in A,\ V_\alpha\in\mathscr{B}\wedge U=\bigcup_{\alpha\in A}V_\alpha.$$

因为 $x\in U$，所以 $\exists\alpha_0\in A$, s. t. $x\in V_{\alpha_0}$. 令 $W_x=V_{\alpha_0}$，则 $W_x\in\mathscr{B}$，且 $x\in W_x\subset U$.

$\Leftarrow$. 显然此时 $\forall U\in\mathscr{T}$, $U=\bigcup_{x\in U}W_x$, $W_x\in\mathscr{B}$. 所以 $\mathscr{B}$ 是拓扑 $\mathscr{T}$ 的一个基. ∎

(3.7) **定理** 设 $\mathscr{B}\subset\mathscr{P}(X)$, $X=\bigcup_{U\in\mathscr{B}}U$.

$\exists$集合 X 上的一个拓扑 $\mathscr{T}$, s. t. $\mathscr{B}$ 是 $\mathscr{T}$ 的一个基$\Leftrightarrow$

$$\forall U\in\mathscr{B}, V\in\mathscr{B}\wedge x\in U\cap V, \exists W\in\mathscr{B}, \text{ s. t. }$$

$$x\in W\subset U\cap V.$$

证 $\Rightarrow$. 任取 $U\in\mathscr{B}$, $V\in\mathscr{B}$. 因为 $U\cap V$ 是关于拓扑 $\mathscr{T}$ 的开集，$\mathscr{B}$ 是 $\mathscr{T}$ 的一个基，所以从定理(3.6)看出，$\forall x\in U\cap V$, $\exists W\in\mathscr{B}$, s. t. $x\in W\subset U\cap V$.

$\Leftarrow$. 令 $\mathscr{T}$ 为 $\mathscr{B}$ 中元素所有的并集组成的集合. 显然 $\mathscr{T}$ 中任意一族元素的并集，仍为 $\mathscr{B}$ 中元素的并集，因此这个并集必须属于 $\mathscr{T}$. 现在去证明，当 $U\in\mathscr{T}$, $V\in\mathscr{T}$ 时，$U\cap V\in\mathscr{T}$. 如果 $U\cap V=\emptyset$，则因空集为 $\mathscr{B}$ 中元素的空族的并，因此，$U\cap V\in\mathscr{T}$. 设 $U\cap V\neq\emptyset$，并设 x 为 $U\cap V$ 的任意元素. 因为 U 与 V 都是 $\mathscr{B}$ 中元素的并集，所以

$$\exists U_0\in\mathscr{B}, V_0\in\mathscr{B}, \text{ s. t. } x\in U_0\subset U\wedge x\in V_0\subset V.$$

由于条件满足，因此必有

$$W_x \in \mathscr{B},\ \text{s.t.}\ x \in W_x \subset U_0 \cap V_0 \subset U \cap V.$$

由此可见，

$$U \cap V = \bigcup_{x \in U \cap V} W_x,\quad W_x \in \mathscr{B}.$$

这证明了 $\qquad U \in \mathscr{T} \wedge V \in \mathscr{T} \Rightarrow U \cap V \in \mathscr{T}.$

又 $\mathscr{B}$ 中元素的空族的交为 X，而依假设 $X = \bigcup_{U \in \mathscr{B}} U \in \mathscr{T}$. 于是由数学归纳法[①] 可知，$\mathscr{T}$ 中元素的任何有限交属于 $\mathscr{T}$. 由此可见，$\mathscr{T}$ 是 X 上的一个拓扑，而 $\mathscr{B}$ 是它的一个基. ▌

(3.8) **定理** 设 $\mathscr{S} \subset \mathscr{P}(X)$. 那末，集合 X 上有一个拓扑 $\mathscr{T}$ 以 $\mathscr{S}$ 为亚基.

证 令 $\mathscr{B}$ 表示 $\mathscr{S}$ 中元素的一切有限交所组成的集合. 由于 $\mathscr{S}$ 中元素的空族的交为 X，因而 $X \in \mathscr{B}$. 既然 $\mathscr{B}$ 中任意两元素的交集仍为 $\mathscr{S}$ 中元素的一个有限交，可见 $\mathscr{B}$ 中任意两个元素的交集必定属于 $\mathscr{B}$. 于是由定理(3.7)中条件的充分性看出，X 上有一个拓扑 $\mathscr{T}$ 以 $\mathscr{B}$ 为它的一个基，因此，$\mathscr{S}$ 是它的亚基. ▌

(3.9) **定义** 定理(3.8)中的拓扑 $\mathscr{T}$ 称为由集合类 $\mathscr{S}$ 所生成.

容易看出，X 上的一个拓扑 $\mathscr{T}$ 的每个基同时也是它的亚基；但反之则不然，这从定理(3.8)就可以看出，因为在证明中我们所构造的拓扑 $\mathscr{T}$ 的基 $\mathscr{B}$ 一般应包含 $\mathscr{S}$ 作为它的真子集，而且 $\mathscr{B}$ 中的元素也不必是 $\mathscr{S}$ 中元素的并集.

例 16 令

$$X = \{1, 2, 3, 4, 5\},\qquad \mathscr{S} = \{\{1\}, \{2, 3\}, \{2, 5\}, \{4, 5\}\}.$$

那末，定理(3.8)证明中所构造的 $\mathscr{B}$ 应该是由下列元素所组成：

$$\mathscr{B} = \{\emptyset, X, \{1\}, \{2\}, \{5\}, \{2, 3\}, \{2, 5\}, \{4, 5\}\}.$$

我们看出，$\mathscr{B}$ 的元素 $\{2\} \notin \mathscr{S}$，而且也不是 $\mathscr{S}$ 中元素的并集. 由 $\mathscr{S}$ 所生成的拓扑 $\mathscr{T}$ 应该包含 $\mathscr{B}$ 的所有元素，同时应该包含 $\mathscr{B}$

① 在这里归纳法由 $n=0$ 开始，即由集合空族的交开始.

中元素的所有并集，而不包含其他．现在把 $\mathscr{T}$ 的一切元素开列如下：

$$\emptyset,\ X,\ \{1\},\ \{2\},\ \{5\},\ \{2,3\},\ \{2,5\},\ \{4,5\},$$
$$\{1,2,3\},\{1,2,5\},\{1,4,5\},\{1,2\},\{1,5\},$$
$$\{2,3,5\},\{2,3,4,5\},\{2,4,5\},\{1,2,3,5\},$$
$$\{1,2,4,5\}.$$

(3.10) **定义** 设 $\mathscr{T}$ 与 $\mathscr{T}'$ 是集合 X 上的两个拓扑．如果 $\mathscr{T}\subset\mathscr{T}'$，那末，我们就说，拓扑 $\mathscr{T}$ **小于或等于**拓扑 $\mathscr{T}'$，或者说，拓扑 $\mathscr{T}'$ **大于或等于**拓扑 $\mathscr{T}$①．设 $\{\mathscr{T}_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 是 X 上的一个拓扑族．如果 $\exists\alpha_0\in A$, s.t. $\forall\alpha\in A$, 都有 $\mathscr{T}_{\alpha_0}\subset\mathscr{T}_\alpha$，则称 $\mathscr{T}_{\alpha_0}$ 为拓扑族 $\{\mathscr{T}_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 中的**最小拓扑**．仿此可定义拓扑族 $\{\mathscr{T}_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 中的**最大拓扑**．

(3.11) **定理** 设 $\mathscr{S}\subset\mathscr{P}(X)$，那末，$X$ 上由 $\mathscr{S}$ 所生成的拓扑 $\mathscr{T}$ 为 X 上包含 $\mathscr{S}$ 的所有拓扑中的最小拓扑．

证 设 $\{\mathscr{T}_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 是包含 $\mathscr{S}$ 的 X 上的所有拓扑所成的一个族．由于 X 上由 $\mathscr{S}$ 所生成的拓扑 $\mathscr{T}\supset\mathscr{S}$，因而 $\exists\alpha_0\in A\ni\cdot$ $\mathscr{T}_{\alpha_0}=\mathscr{T}$．任取一个 $\alpha\in A$．因为 $\mathscr{T}_\alpha\supset\mathscr{S}$，所以 $\mathscr{T}_\alpha$ 必须包含 $\mathscr{S}$ 中元素的一切有限交．于是从定理(3.8)的证明看出，$\mathscr{T}_\alpha$ 必须包含 $\mathscr{T}$ 的基 $\mathscr{B}$：$\mathscr{T}_\alpha\supset\mathscr{B}$．因此，$\mathscr{T}_\alpha$ 必须包含 $\mathscr{B}$ 中元素的一切并集，即 $\mathscr{T}_\alpha\supset\mathscr{T}_{\alpha_0}$．所以根据定义(3.10)，$\mathscr{T}_{\alpha_0}$，也就是 $\mathscr{T}$，是族 $\{\mathscr{T}_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 中的最小拓扑．】

(3.12) 设 $\{\mathscr{T}_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 是集合 X 上的一个拓扑族．那末，

$$\mathscr{T}=\bigcap\nolimits_{\alpha\in A}\mathscr{T}_\alpha$$

---

① 当 $\mathscr{T}\subset\mathscr{T}'$ 时，某些作者称拓扑 $\mathscr{T}$ 弱于拓扑 $\mathscr{T}'$ 或 $\mathscr{T}'$ 强于 $\mathscr{T}$；但另外一些作者则与此相反，称 $\mathscr{T}$ 强于 $\mathscr{T}'$ 或 $\mathscr{T}'$ 弱于 $\mathscr{T}$；此外，还有一些作者称 $\mathscr{T}$ 较 $\mathscr{T}'$ 为粗糙或 $\mathscr{T}'$ 较 $\mathscr{T}$ 为精细．我们在这里用一个集合包含另一个集合的自然涵义来定义两个拓扑的大和小．这样，当 $\mathscr{T}\subset\mathscr{T}'$，又 $\mathscr{T}\neq\mathscr{T}'$ 时，则称拓扑 $\mathscr{T}$ 小于拓扑 $\mathscr{T}'$ 或 $\mathscr{T}'$ 大于 $\mathscr{T}$．

也是 X 上的一个拓扑.

证 设$\{U_i\}_{i\in I}$是$\mathscr{T}$中元素的任一有限族. 因为对于每个$i\in I$, U_i属于所有的$\mathscr{T}_\alpha$, 而$\mathscr{T}_\alpha$是 X 上的拓扑, 所以

$$\forall\alpha\in A,\ \bigcap_{i\in I}U_i\in\mathscr{T}_\alpha,\ \text{从而}\ \bigcap_{i\in I}U_i\in\mathscr{T}.$$

因此, $\mathscr{T}$ 满足公理 T1. 同理易知, $\mathscr{T}$ 也满足公理 T2. 所以 $\mathscr{T}$ 是 X 上的一个拓扑. ▌

(3.13) **定理** 设$\mathscr{S}\subset\mathscr{P}(X)$, 又$\{\mathscr{T}_\alpha\}_{\alpha\in A}$是包含$\mathscr{S}$的 X 上所有拓扑所成的一个族. 那末, X 上的拓扑$\mathscr{T}$由$\mathscr{S}$所生成的必要而且充分的条件是

$$\mathscr{T}=\bigcap_{\alpha\in A}\mathscr{T}_\alpha.$$

证 这是定理(3.11)和(3.12)的直接推论. ▌

四、一些重要的拓扑概念

1. 闭集与闭包 以下我们将在集合 X 上随意固定一个拓扑$\mathscr{T}$. 当我们谈到(拓扑)空间 X 时, 指的就是空间$(X, \mathscr{T})$. 又当$A\subset X$时, 则约定

$$\mathscr{C}A=X-A.$$

(4.1) **定义** 设 F 是拓扑空间 X 的一个点集. 如果 $\mathscr{C}F$ 开于空间 X 中, 那末, F 就叫做空间 X 的闭集, 或者说它闭于空间 X 中.

(4.2) **定理** 拓扑空间 X 的闭集具有下列性质:

1° 点集 X 是空间 X 的闭集;

2° 空集$\emptyset$是空间 X 的闭集;

3° 如果$\{F_i\}_{i\in I}$是空间 X 的任意一个闭集族, 则$\bigcap_{i\in I}F_i$也是空间 X 的闭集;

4° 如果 F_1 与 F_2 是空间 X 的闭集, 则 $F_1\cup F_2$ 也闭于空间

X 中.

证 性质1°与2°是很明显的. 事实上，我们有 $\mathscr{C}X=\emptyset$, $\mathscr{C}\emptyset=X$，而 $\emptyset$ 与 X 都是空间 X 的开集. 我们去证明性质3°. 利用笛·摩尔根定律(0.5.8)，我们有

$$\mathscr{C}(\bigcap_{i\in I}F_i)=\bigcup_{i\in I}\mathscr{C}F_i. \tag{7}$$

由于 $\forall i\in I$, F_i闭于空间 X 中，根据定义(4.1), $\forall i\in I$, $\mathscr{C}F_i$ 开于空间 X 中. 于是根据公理 T2, 等式(7)的右端是空间 X 的开集，从而 $\bigcap_{i\in I}F_i$ 是空间 X 的闭集. 同样，利用笛·摩尔根定律(0.3.16)，我们不难证明性质4°. 】

从定理(4.2)中的性质4°，利用数学归纳法，我们立即推出下面的命题:

(4.3) 空间 X 的闭集的任何有限并仍然是 X 的闭集.

例 17 实直线 $\mathbb{R}^1$ (一般言之，任何度量空间)的每个单点集 $\{a\}$ 都是闭集.

事实上，在 $\mathbb{R}^1$ 中

$$\mathscr{C}\{a\}=\ ]-\infty,\ a[\ \cup\ ]a,\ +\infty[,$$

于此

$$]-\infty,\ a[\ \text{及}\ ]a,\ +\infty[$$

显然都是 $\mathbb{R}^1$ 的开集. 试看 $\mathbb{R}^1$ 中所有有理点组成的点集 $\mathbb{Q}$ 和所有无理点组成的点集 $\mathbb{I}$. 显然 $\mathbb{Q}$ 不是 $\mathbb{R}^1$ 的开集；这是因为,

$$\forall a\in\mathbb{Q}\wedge\forall\delta>0,\ B(a,\ \delta)=\ ]a-\delta,\ a+\delta[$$

中总含有无理点，从而 $B(a,\ \delta)\not\subset\mathbb{Q}$. 同理 $\mathbb{I}$ 也不是实直线 $\mathbb{R}^1$ 的开集. 由于

$$\mathbb{Q}=\mathscr{C}\mathbb{I},\quad \mathbb{I}=\mathscr{C}\mathbb{Q},$$

可见 $\mathbb{Q}$ 与 $\mathbb{I}$ 都不是 $\mathbb{R}^1$ 的闭集. 又

$$\mathbb{Q}=\bigcup_{a\in\mathbb{Q}}\{a\},\quad \mathbb{I}=\bigcup_{a\in\mathbb{I}}\{a\},$$

而 $\mathbb{Q}$ 与 $\mathbb{I}$ 都是无穷集. 这说明了，无穷多个闭集的并集不必是闭集.

例 17 还说明了，任何拓扑空间 X 不但有又开又闭的点集(如点集 X 与 $\emptyset$). 而且还可能有不开不闭的点集(例如当 $X=\mathbb{R}^1$ 时的 $\mathbb{Q}$ 与 $\mathbb{I}$). 在离散空间中，由于它的每个点集都是开的，因而它的每个点集同时也都是闭的.

(4.4) **定义** 设 A 是空间 X 的一个任意点集. 我们称包含 A 的一切闭集的交集为点集 A 的闭包，并记作 $\overline{A}$. 如果一点 $p\in\overline{A}$，则我们说点 p 粘附于[1]点集 A.

因为在空间 X 中任意一族闭集的交集总是闭的，所以集合 A 的闭包 $\overline{A}$ 可以解释为包含 A 的最小闭集.

(4.5) **定理** 设 A 为空间 X 的一个点集. X 的一点 p 粘附于 $A\Leftrightarrow\forall X$ 的开集 $U\ni p$, $U\cap A\neq\emptyset$.

证 $\Leftarrow$. 令 $U=\mathscr{C}\overline{A}$. 因为 $\overline{A}$ 是空间 X 的闭集，所以 U 开于 X 中. 但是 $U\cap A=\emptyset$，因此，$p\notin U$. 由此可见，$p\in\overline{A}$.

$\Rightarrow$. 设 $p\in\overline{A}$，并设 U 是空间 X 的一个随意开集，它包含点 p. 令 $F=\mathscr{C}U$. 那末，$p\notin F$，从而 $\overline{A}\not\subset F$. 因为 F 闭于 X 中，所以 $A\not\subset F$. 由此可见，$\exists q\in A\ni\cdot q\notin F$. 因此，$q\in A$, $q\in U$，即 $U\cap A\neq\emptyset$. ▌

(4.6) **定理** 点集 A 闭于空间 X 中 $\Leftrightarrow A=\overline{A}$.

证 当 A 是闭集时，A 就是包含它自己的最小闭集；因此，$A=\overline{A}$. 反之，由于 $\overline{A}$ 是 X 的闭集，因而当 $A=\overline{A}$ 时，A 必然闭于 X 中. ▌

(4.7) **定理** 空间 X 的点集 A、B、…的闭包具有下列性质:

1° $A\subset\overline{A}$;

2° $\overline{\emptyset}=\emptyset$;

3° $\overline{A}=\overline{\overline{A}}$，其中 $\overline{\overline{A}}$ 表示 A 的闭包 $\overline{A}$ 的闭包;

---

[1] 因此，A 的闭包又称为 A 的粘附部(adherence).

4° $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cup\overline{B}$.

证 性质1°、2°、3°直接由定义(4.4)、定理(4.2)与(4.6)推出. 现在只须证明性质4°. 事实上,由于$A\subset\overline{A}\wedge B\subset\overline{B}$,因而有$A\cup B\subset\overline{A}\cup\overline{B}$. 既然$\overline{A}\cup\overline{B}$是包含$A\cup B$的一个闭集, 那就必然包含$\overline{A\cup B}$: $\overline{A\cup B}\subset\overline{A}\cup\overline{B}$. 另一方面, 根据定理(4.5) [或直接根据定义(4.4)],

$$A\subset A\cup B\wedge B\subset A\cup B\Rightarrow\overline{A}\subset\overline{A\cup B}\wedge\overline{B}\subset\overline{A\cup B}\Rightarrow\overline{A}\cup\overline{B}\subset\overline{A\cup B}.$$

于是,

$$\overline{A\cup B}\subset\overline{A}\cup\overline{B}\wedge\overline{A}\cup\overline{B}\subset\overline{A\cup B}\Rightarrow\overline{A\cup B}=\overline{A}\cup\overline{B}.$$ ▌

2. 聚点与导集 "导集"这一概念密切联系着闭集与闭包的概念,在拓扑学中占着重要的地位. 而为了定义点集的"导集",我们应该先给出"聚点"或"极限点"的定义, 它是«实变函数论»中极限点的概念的推广.

(4.8) **定义** 设A是空间X的任一点集, 又p是X中的一个点(p不必属于A). 如果包含p的每个开集总包含A中异于p的一个点,则p叫做点集A的一个聚点或极限点. 点集A的所有聚点组成的集合A'叫做A的导集.

显而易见, $p\in A'\Leftrightarrow p\in(A-\{p\})'$.

(4.9) **定理** 点集A是空间X的闭集$\Leftrightarrow A'\subset A$.

证 由定义(4.8)及定理(4.5)看出, A的每个聚点都粘附于A. 因此我们有$A'\subset\overline{A}$. 于是由定理(4.6)看出, 当A是空间X的闭集时,我们有$A'\subset A$. 反之,设$A'\subset A$, 并设$p\in\overline{A}$. 那末, $p\in A\vee p\in A'$. 由于$A'\subset A$,于是在任何情况下我们都有$p\in A$. 由此可见, $A=\overline{A}$. 所以根据定理(4.6), A是空间X的闭集. ▌

在定理(4.9)的证明中我们还看出: $\overline{A}=A\cup A'$. 空集当然没有聚点; 换言之, $\emptyset'=\emptyset$. 对于任意的一点$p\in X$,由于$\{p\}-\{p\}=$

$\emptyset$, 可见 $p \notin \{p\}'$. 设 A 与 B 为空间 X 的任意两个点集, 并设 $p \in (A \cup B)'$. 那末,

$p \in \overline{(A \cup B) - \{p\}} = \overline{(A - \{p\}) \cup (B - \{p\})} = \overline{A - \{p\}} \cup \overline{B - \{p\}}$,

于是 $p \in A' \cup B'$. 反之, 不难看出,

$$p \in A' \cup B' \Rightarrow p \in (A \cup B)'.$$

因此
$$(A \cup B)' = A' \cup B'.$$

令 A'' 表示 A 的导集的导集, 并令 $p \in A''$. 那末,

$$\forall \text{开集} U \ni p,\ U \cap (A' - \{p\}) \neq \emptyset.$$

因此, $\exists$ 一点 $q \in U \cap A'$, s. t. $q \neq p$. 由于 $q \in A'$, 又开集 $U \ni q$, 可见 $U \cap A \neq \emptyset$. 这证明了 $p \in \overline{A} = A \cup A'$, 从而证明了 $A'' \subset A \cup A'$.

综上所述, 我们得到下面的

(4.10) **定理** 空间 X 的点集的导集具有下列性质:

1° $\emptyset' = \emptyset$;

2° $p \notin \{p\}'$;

3° $(A \cup B)' = A' \cup B'$;

4° $A'' \subset A' \cup A$.

既然任何度量空间 X 都是一个拓扑空间, 那末, 闭集、闭包、聚点、导集以及今后即将定义的一切拓扑概念在度量空间中就都有意义. 而且不难证明, 在度量空间 X 中任何点集 A 的导集 A' 都是空间 X 的闭集, 换言之, 我们总有 $A'' \subset A'$. 然而对于一个随意的拓扑空间 X, 这一包含式可不一定成立, 我们只能有定理 (4.10) 中的性质 4°. 又在任何度量空间 X 中, 如果 p 是空间 X 的点集 A 的一个极限点, 则 X 中包含点 p 的任意开集必然含有 A 中异于 p 的无穷多个点, 于是点集 A 必须是无穷集 (当然整个空间 X 更是如此). 换句话说, 度量空间的有限点集必然没有极限点. 这个性质在一个随意的拓扑空间里也不成立.

例 18 令

$$X=\{a, b, c, d\}, \mathscr{T}=\{\emptyset, X, \{b, c\}, \{a, b, c\}, \{b, c, d\}\}.$$

如此，$\mathscr{T}$ 显然是集合 X 上的一个拓扑，于是得到一个拓扑空间 $(X, \mathscr{T})$. 令 $A=\{a, b\}$. 那末,易知

$$A'=\{a, c, d\}, \ A''=\{a, b, d\}.$$

我们看出,虽然 $A''\subset A\cup A'=X$,但是 $A''\not\subset A'$,从而知道 A' 不是空间 X 的闭集. 又 A 尽管是一个有限集，但它却有三个极限点 a、c、d.

3. 邻域·序列的收敛性 拓扑空间中一点的邻域的概念是度量空间中一点的邻域的概念的推广.

(4.11) **定义** 设 N_a 是拓扑空间 X 的一个点集，a 是空间 X 的一个点. 如果 $\exists X$ 的一个开集 U s.t. $a\in U\subset N_a$, 那末,点集 N_a 就叫做空间 X 中点 a 的一个邻域.

从定义(4.11)看出,包含点 a 的任意开集 V_a 都是点 a 的一个邻域,这样的邻域称为空间 X 中点 a 的一个开邻域①. 如果点 a 的邻域 N_a 是闭集,则 N_a 称为点 a 的一个闭邻域.

因为点集 X 是空间 X 的一个开集,所以空间 X 的每个点都至少有一个开邻域. 从定义(4.11)看出,对于每个点 $a\in X$, a 的任何邻域都包含 a. 如果 N_a 是点 a 的邻域,又 X 的点集 $M_a\supset N_a$, 则 M_a 也是点 a 的邻域. 如果 N_a 与 M_a 是同一点 a 的邻域,则交集 $M_a\cap N_a$ 也是点 a 的邻域. 事实上,根据定义(4.11), $\exists$ 空间 X 的开集 U, V s.t.

$$a\in U\subset M_a, \quad a\in V\subset N_a,$$

于是 $a\in U\cap V\subset M_a\cap N_a$, 而 $U\cap V$ 开于空间 X 中. 如果 V_a 是点 a 的一个开邻域,又点 $b\in V_a$, 则必有 b 的一个开邻域 $V_b\subset V_a$. 事实上, V_a 也是点 b 的开邻域,所以可以取 $V_b=V_a$.

① 许多作者提到邻域时,指的就是这里的开邻域.

总结以上所论，我们有下面的定理：

(4.12) **定理** 空间 X 中点的开邻域具有下列性质：

1° 空间 X 的每个点 a 至少有一个开邻域 V_a；

2° 点 a 的开邻域 V_a 包含点 a；

3° 点 a 的任意两个开邻域的交集是点 a 的一个开邻域；

4° 如果 b 是 a 的开邻域 V_a 中的一个点，则 b 有一个开邻域 V_b 使得 $V_b \subset V_a$.

前面已经指出，定理(4.12)中性质 1°—3° 对随意的邻域都是适用的.

(4.13) **定理** 点集 U 开于空间 X 中 $\Leftrightarrow \forall a \in U$, U 是点 a 的一个邻域.

证 条件显然是必要的. 现在去证明条件的充分性. 依假设，$\forall a \in U$, $\exists a$ 的一个开邻域 V_a, s.t. $V_a \subset U$. 由此可见，

$$U = \bigcup_{a \in U} V_a,$$

于是根据公理 T2, U 开于空间 X 中. ▌

定理(4.13)可以重新表述如下：U 是空间 X 的开集 $\Leftrightarrow \forall a \in U$, $\exists X$ 的开集 $V_a \ni a$, s.t. $V_a \subset U$.

容易看到，对于任何一个度量空间 (X, d) 来说，定义(2.10)与定义(4.11)是等价的. 事实上，设 N_a 按定义 (2.10) 是点 a 的一个邻域. 那末，因为开球 $B(a, \delta)$ 是拓扑空间 $(X, \mathscr{T}_d)$ 的一个开集，所以按定义(4.11)，N_a 也是点 a 的一个邻域. 反之，设按定义(4.11)，N_a 是点 a 的一个邻域. 那末，按度量空间的开集的定义，

$$\exists \delta > 0, \text{ s.t. } B(a, \delta) \subset U,$$

而 $U \subset N_a$. 由此可知，$B(a, \delta) \subset N_a$. 所以 N_a 按定义(2.10)也是点 a 的邻域.

我们很容易把度量空间中收敛序列的概念推广到拓扑空间中

去.

(4.14) **定义** $\{a_n\}$是拓扑空间 X 中的收敛序列$\Leftrightarrow\exists$一点 $a\in X\ni\cdot\forall a$ 的邻域 N_a, $\exists N\in\mathbb{N}\ni\cdot n>N\Rightarrow a_n\in N_a$. 这时 a 叫做收敛序列$\{a_n\}$的一个**极限**. 当收敛序列$\{a_n\}$以 a 为它的极限时, 我们又说, 序列$\{a_n\}$收敛于 a, 或者说, 当 n 趋于无穷大时, a_n 趋于 a, 记作:

$$\lim_{n\to\infty} a_n=a,\quad 或者\quad \lim_n a_n=a,\quad 或者$$

$$\lim a_n=a,\quad 或者\quad a_n\to a\quad (n\to\infty).$$

如果序列$\{a_n\}$不收敛, 那末, $\{a_n\}$就称为**发散序列**.

显然,

$$\lim a_n=a\Leftrightarrow\forall N_a,\quad \exists N\ni\cdot\forall n>N,\quad a_n\in N_a.$$

与度量空间里的收敛序列不同, 在一个随意的拓扑空间里, 收敛序列的极限并不一定是唯一的.

例 19 取例 18 中的拓扑空间$(X, \mathscr{T})$, 并定义 X 中的序列$\{a_n\}$如下: $\forall n\in\mathbb{N}$, 令 $a_n=b$. 如此, 则见

$$\lim a_n=b,\quad \lim a_n=c.$$

上例中的序列$\{a_n\}$称为**常项序列**. 任何拓扑空间的常项序列总是收敛的.

(4.15) **定义** 设$\{n_k\}$是一个严格递增的自然数列, $\{a_n\}$是某个集合 X 中的一个随意序列. 作序列 $\{a_{n_k}\}$, 使得, $\forall k\in\mathbb{N}$, 若 $n_k=m$, 则有 $a_{n_k}=a_m$. 那末, 我们就叫序列$\{a_{n_k}\}$为序列$\{a_n\}$的一个**子序列**.

(4.16) 如果空间 X 中的一个序列$\{a_n\}$收敛于 X 的一点 a, 则序列$\{a_n\}$的任一子序列$\{a_{n_k}\}$也收敛于点 a.

证 $\lim_n a_n=a\Rightarrow\forall a$ 的邻域V_a, $\exists N\in\mathbb{N}\ni\cdot\forall n>N, a_n\in V_a$,

但 $k>N\Rightarrow n_k>N\Rightarrow a_{n_k}\in V_a$. 可见,

$$\lim_k a_{n_k}=a. \quad ▌$$

4. 点集的内部、外部与边界 在下面我们提到的点集或集合,都指的是某一给定的拓扑空间 X 的点集.

(4.17) **定义** 我们称包含于点集 A 的所有开集的并集为点集 A 的内部,记作 $\mathrm{Int}\,A$. 属于 $\mathrm{Int}\,A$ 的点叫做 A 的内点.

根据定义(4.17), $\mathrm{Int}\,A$ 乃是包含于点集 A 的最大开集. 显而易见

$$p\in \mathrm{Int}\ A\Leftrightarrow \exists \text{ 开集 } U\ni\cdot p\in U\subset A.$$

因此,

$$N_p \text{ 为点 } p \text{ 的一个邻域} \Leftrightarrow p \text{ 是点集 } N_p \text{ 的一个内点}.$$

(4.18) $\mathrm{Int}\ A=\mathscr{C}(\overline{\mathscr{C}A})$.

证 因为 $\mathrm{Int}\ A$ 是包含于 A 的所有开集的并, 所以由笛·摩尔根定律看出, $\mathscr{C}\mathrm{Int}\ A$ 是包含 $\mathscr{C}A$ 的一切闭集的交. 因此,

$$\mathscr{C}\,\mathrm{Int}\ A=\overline{\mathscr{C}A},$$

于是,

$$\mathrm{Int}\ A=\mathscr{C}(\overline{\mathscr{C}A}). \quad ▌$$

(4.19) **定义** 点集 A 的余集 $\mathscr{C}A$ 的内部叫做 A 的外部,记作 $\mathrm{Ext}\ A$. 如果一点 $p\in \mathrm{Ext}\ A$, 则点 p 叫做点集 A 的外点.

所以 $\mathrm{Ext}\ A$ 也是开集.

由定义(4.19)立即看出

$$p\in \mathrm{Ext}\ A\Leftrightarrow \exists p \text{ 的开邻域 } U_p,\ \text{s.t.}\ U_p\cap A=\emptyset.$$

此外我们还有下面的命题:

(4.20) $\mathrm{Ext}\ A=\mathscr{C}\overline{A}$.

证 根据定义(4.19)及定理(4.18),我们有

$$\mathrm{Ext}\,A=\mathrm{Int}\,\mathscr{C}A=\mathscr{C}(\overline{\mathscr{C}\mathscr{C}A})=\mathscr{C}\overline{A}. \quad ▌$$

(4.21) **定义** 令 $\partial A=\overline{A}-\mathrm{Int}\ A$. 那末,点集 ∂A 就叫做

点集 A 的边界. 如果点 $p\in\partial A$, 则 p 称为 A 的边界点.

由定义(4.21)立即看出

$$\partial A=\overline{A}\cap\mathscr{C}\operatorname{Int}A=\overline{A}\cap\overline{\mathscr{C}A}.$$

因此, ∂A 是闭集, 并且

$$p\in\partial A\Leftrightarrow p\text{ 既非 }A\text{ 的内点又非 }A\text{ 的外点.}$$

换言之,

$$p\in\partial A\Leftrightarrow\forall\text{ 开集 }U\ni p,\ U\cap A\neq\emptyset\wedge U\cap\mathscr{C}A\neq\emptyset.$$

(4.22) $\overline{A}=\operatorname{Int}A\cup\partial A.$

证 这直接由下面的事实推出:

$$\operatorname{Int}A\subset A\subset\overline{A}\wedge\partial A=\overline{A}-\operatorname{Int}A. \ ▌$$

显然, $X=\operatorname{Int}A\cup\operatorname{Ext}A\cup\partial A.$

例 20 试看实直线 $\mathbb{R}^1$ 及其点集 $\mathbb{Q}$. 由于任何非退化的开区间总含有无穷多个有理数与无理数, 因而能够包含于 $\mathbb{Q}$ 或 $\mathscr{C}\mathbb{Q}=\mathbb{I}$ 的 $\mathbb{R}^1$ 的开集只有空集 $\emptyset$. 所以

$$\operatorname{Int}\mathbb{Q}=\operatorname{Ext}\mathbb{Q}=\emptyset.$$

由此可见, $\partial\mathbb{Q}=\mathbb{R}^1.$

5. 其他的一些拓扑概念 在这一款里, 我们将简要地阐述下列各概念: 孤集、离散集、点集的处处稠密、无处稠密与自稠密. 讨论的范围仍然是一个固定的拓扑空间 X.

(4.23) **定义** 点集 A 里不是 A 的聚点的一切点都叫做 A 的孤点. 如果点集 A 仅由孤点所组成, 则 A 就叫做一个孤集.

由定义(4.23)立即推出:

$$p\text{ 是 }A\text{ 的孤点}\Leftrightarrow p\in A-A';$$

因此, p 是 A 的孤点 $\Leftrightarrow\exists$ 开集 $U\ni p$, s.t. $U\cap A=\{p\}$;

$$A\text{ 是孤集}\Leftrightarrow A\cap A'=\emptyset.$$

(4.24) **定义** 如果点集 A 没有聚点, 即 $A'=\emptyset$, 则 A 称为离

散集.

按定义(4.24),离散空间的任何点集显然都是离散集;离散集必然是孤集,但反之则不然. 例如在实直线 $\mathbb{R}^1$ 中,点集

$$A=\left\{1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \cdots,\ \frac{1}{n},\ \cdots\right\}$$

是一个孤集,然而并非离散集,因为 $A'=\{0\}\neq\emptyset$.

(4.25) **定义** 如果 $\overline{A}=X$, 则点集 A 叫做在空间 X 中处处稠密或稠密.

由定义(4.25)立即推出: 点集 A 在空间 X 中处处稠密 $\Leftrightarrow\forall$ 开集 $U\neq\emptyset$, $U\cap A\neq\emptyset$.

(4.26) **定义** 如果 $\mathscr{C}\overline{A}$, 即 Ext A 在空间 X 中处处稠密,则点集 A 叫做在空间 X 中**无处稠密**.

(4.27) **定理** 点集 A 在空间 X 中无处稠密 $\Leftrightarrow\forall$ 开集 $U\neq\emptyset$, $\exists$ 非空开集 $V\subset U\ni\cdot V\cap A=\emptyset$.

证 $\Rightarrow$. 随意给定一个开集 $U\neq\emptyset$. 既然 $\mathscr{C}\overline{A}$ 在空间 X 中是稠密的, 那就必然有 $U\cap\mathscr{C}\overline{A}\neq\emptyset$. 令 $V=U\cap\mathscr{C}\overline{A}$. 很明显, V 是一个非空开集,并且 $V\subset U$. 又

$$p\in V\Rightarrow p\in\mathscr{C}\overline{A}\Rightarrow p\notin\overline{A}\Rightarrow p\notin A.$$

由此可见, $V\cap A=\emptyset$.

$\Leftarrow$. 设 p 是空间 X 的任意点,并设 U 是 p 的任意开邻域. 那末, $\exists$ 开集 $V\subset U$, $V\neq\emptyset$, s.t. $V\cap A=\emptyset$. 在 V 中任取一点 q, 则 $q\notin\overline{A}$, 因为否则将有 $V\cap A\neq\emptyset$, 这是不可能的. 由此可见, $q\in\mathscr{C}\overline{A}$. 于是 $V\cap\mathscr{C}\overline{A}\neq\emptyset$, 因此更有 $U\cap\mathscr{C}\overline{A}\neq\emptyset$. 所以 $p\in\overline{\mathscr{C}\overline{A}}$. 这证明了 $\overline{\mathscr{C}\overline{A}}=X$. 因此 $\mathscr{C}\overline{A}$ 在 X 中处处稠密. 根据定义(4.26), 点集 A 无处稠密于 X 中. ▌

(4.28) **定义** 如果点集 A 中没有孤点,则点集 A 称为自稠密的.

由定义(4.28)可知，A 是自稠密的$\Leftrightarrow A\subset A'$；那就是说，$A$ 的每个点都是聚点. 由此可见，空集是自稠密的.

(4.29) **定义** 如果点集 A 既是闭的又是自稠密的，那末，A 就叫做**完备集**.

显然，A 是完备的$\Leftrightarrow A=A'$.

例 21 在例 20 中我们已经指出，在实直线 $\mathbb{R}^1$ 中，$\overline{\mathbb{Q}}=\mathrm{Int}\,\mathbb{Q}\cup\partial\mathbb{Q}=\emptyset\cup\mathbb{R}^1=\mathbb{R}^1$，所以 $\mathbb{R}^1$ 中所有有理点的集合 $\mathbb{Q}$ 是处处稠密的. 我们在预篇中已经指出，$\mathbb{Q}$ 是可数的. 因此 $\mathbb{R}^1$ 有一个**可数稠密点集** $\mathbb{Q}$.

所有整数点的集合 $\mathbb{Z}$ 显然在 $\mathbb{R}^1$ 中无处稠密.

在古典«分析»的实数理论中，有在例 20 中引用过的、为人所熟知的一个性质，即任意两个相异的实数之间必定有无穷多个实数. 这说明 $\mathbb{R}'=\mathbb{R}$，即 $\mathbb{R}$ 是完备的，当然更是自稠密的. 所以古典«分析»中所谓的实数系的稠密性，指的是自稠密性. 又由例 20 中所引实数的性质看出，$\mathbb{Q}'=\mathbb{R}$，$\mathbb{I}'=\mathbb{R}$，因此 $\mathbb{Q}$ 与 $\mathbb{I}$ 在实直线 $\mathbb{R}^1$ 中都是自稠密的.

至于所谓有理数系 $\mathbb{Q}$ 的稠密性，即任意两个相异的有理数之间存在着无穷多个有理数，则可理解为 $\mathbb{Q}$ 在 $\mathbb{R}^1$ 的度量子空间 $(\mathbb{Q}, d_1)$ 中的自稠密性，于此，d 表示一维欧氏度量.

附言 (4.2)、(4.7)、(4.10)与(4.12)各个定理中的每一组命题 1°—4° 都可以作为公理来定义拓扑空间，它们依次刻划空间的闭集、闭包、导集与点的开邻域，并且作为公理的任何一组都与开集公理 T1 与 T2 等价.

五、连续函数

在«拓扑学»中连续函数所起的作用与在«数学分析»中连续函

数所起的作用一样重要，而前者则是后者的推广. 由于度量空间既是特殊的拓扑空间，同时又是 n 维欧氏空间的直接推广，为了便于读者理解起见，我们先把古典《分析》中连续函数的概念推广到一个随意的度量空间中去.

1. 度量空间到度量空间内的连续函数 让我们首先回忆一下实直线 $\mathbb{R}^1$ 上在其一点 x_0 处连续的实值函数 f 的定义：

f 在点 x_0 处连续 $\Leftrightarrow$

$$\forall \varepsilon>0 \exists \delta>0 \ni \cdot x \in \mathbb{R}^1 \wedge |x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon.$$

换句话说，f 在点 x_0 处连续 $\Leftrightarrow$

$$\forall \varepsilon>0 \exists \delta>0 \ni \cdot x \in B(x_0, \delta) \Rightarrow f(x) \in B(f(x_0), \varepsilon).$$

如果 f 在 $\mathbb{R}^1$ 的每一点处都连续，则称 f 在 $\mathbb{R}^1$ 上连续. 这些概念显然可以直接推广到随意的度量空间去.

(5.1) **定义** 设 f 是度量空间 (X, d) 到度量空间 (Y, d^*) 内的一个函数，即 $f: X \to Y$，并设 x_0 是空间 (X, d) 的一个固定点. f 在点 x_0 处连续 $\Leftrightarrow$

$$\forall \varepsilon>0 \exists \delta>0 \ni \cdot f(B_d(x_0, \delta)) \subset B_{d^*}(f(x_0), \varepsilon),$$

其中 $B_d(x_0, \delta)$ 表示空间 (X, d) 中以点 x_0 为中心、δ 为半径的开球，$B_{d^*}(f(x_0), \varepsilon)$ 是空间 (Y, d^*) 中以 $f(x_0)$ 为中心、ε 为半径的开球.

(5.2) **定义** 如果 (X, d) 到 (Y, d^*) 内的函数 f 在空间 (X, d) 的每一点处都连续，则称 f 为空间 (X, d) 到空间 (Y, d^*) 内的连续函数或连续映射，或简称 f 为映射.

由定义 (5.1) 及定义 (5.2) 立即推出下面的命题：

(5.3) 设 (X, d) 与 (Y, d^*) 为两个随意的度量空间，并设 $f: X \to Y$，$x_0 \in X$. 那末，

1° f 在点 x_0 处连续 $\Leftrightarrow \forall \varepsilon>0 \exists \delta>0 \ni \cdot$

$$x \in X \wedge d(x_0, x)<\delta \Rightarrow d^*(f(x_0), f(x))<\varepsilon;$$

2° f为连续映射$\Leftrightarrow \forall x \in X \wedge \forall \varepsilon>0 \exists \delta_x>0 \ni \cdot$

$x' \in X \wedge d(x, x')<\delta_x \Rightarrow d^*(f(x), f(x'))<\varepsilon$.

(5.4) **定理** 设f为度量空间(X, d)到度量空间(Y, d^*)内的一个函数，$x_0 \in X$. f在点x_0处连续$\Leftrightarrow \forall$空间Y中$f(x_0)$的邻域V, $f^{-1}(V)$总是空间X中点x_0的一个邻域.

证 $\Rightarrow$. 设V是空间Y中点$f(x_0)$的一个随意邻域. 那末，根据定义(2.10),

$$\exists \varepsilon>0 \ni \cdot B_{d^*}(f(x_0), \varepsilon) \subset V.$$

于是根据定义(5.1)[由于$f(x)$在点x_0处连续],

$$\exists \delta>0 \ni \cdot f(B_d(x_0, \delta)) \subset B_{d^*}(f(x_0), \varepsilon).$$

因此我们有 $f^{-1}[f(B_d(x_0, \delta))] \subset f^{-1}(V)$,

从而由(0.4.9)推出

$$B_d(x_0, \delta) \subset f^{-1}(V).$$

于是由定义(2.10)看出，$f^{-1}(V)$是空间X中点x_0的一个邻域.

$\Leftarrow$. $\forall \varepsilon>0$, $B_{d^*}(f(x_0), \varepsilon)$既然是空间$Y$中点$f(x_0)$的一个邻域，由于条件满足，那末，$f^{-1}[B_{d^*}(f(x_0), \varepsilon)]$就应该是空间$X$中点$x_0$的一个邻域. 因此，根据定义(2.10),

$$\exists \delta>0 \text{ s.t. } B_d(x_0, \delta) \subset f^{-1}[B_{d^*}(f(x_0), \varepsilon)].$$

由此，再引用一次(0.4.9)，我们就得到

$$f(B_d(x_0, \delta)) \subset B_{d^*}(f(x_0), \varepsilon).$$

所以f在点x_0处连续. ▌

2. 拓扑空间到拓扑空间内的连续函数 在一个随意的拓扑空间里，由于没有度量，因而无法定义开球，所以连续函数的概念不能利用开球来定义. 既然拓扑空间中每一点都有一个邻域，那末，定理(5.4)中的条件便成为我们把连续的概念推广于拓扑空间的依据.

(5.5) **定义** 设$(X, \mathscr{T})$与$(Y, \mathscr{T}^*)$是两个随意的拓扑空间，并设$f: X \to Y, x \in X$. f在点x处连续$\Leftrightarrow \forall$空间Y中点$f(x)$的邻域V，$f^{-1}(V)$总是空间X中点x的一个邻域. 如果f在空间X的每一点处都连续，那末，f就叫做空间X到空间Y内的连续函数或连续映射. 连续映射也简称映射.

(5.6) **定理** 空间$(X, \mathscr{T})$到空间$(Y, \mathscr{T}^*)$内的函数f是连续的$\Leftrightarrow \forall V \in \mathscr{T}^*$总有$f^{-1}(V) \in \mathscr{T}$；即$f$反射开集.

证 $\Rightarrow$. 令V为空间$(Y, \mathscr{T}^*)$的一个随意开集. 如果$f^{-1}(V)=\emptyset$，则已无可证. 如果$f^{-1}(V) \neq \emptyset$，则可取属于$f^{-1}(V)$的任意一点x. 于是我们有$f(x) \in V$，从而V是空间$(Y, \mathscr{T}^*)$中点$f(x)$的一个邻域. 因为函数f是连续的，所以根据定义(5.5)，$f^{-1}(V)$是空间$(X, \mathscr{T})$中点x的一个邻域. $f^{-1}(V)$既然是它的任一点x的邻域，根据定理(4.13)，$f^{-1}(V)$就必须是空间$(X, \mathscr{T})$的开集.

$\Leftarrow$. 设x是空间$(X, \mathscr{T})$的任意一点，并设V是空间$(Y, \mathscr{T}^*)$中点$f(x)$的任意邻域. 那末，

$$\exists U \in \mathscr{T}^* \ni \cdot f(x) \in U \wedge U \subset V.$$

因为$x \in f^{-1}(U) \subset f^{-1}(V)$，而依假设，$f^{-1}(U) \in \mathscr{T}$，所以$f^{-1}(V)$是空间$(X, \mathscr{T})$中点$x$的一个邻域. 因此，函数$f$在点$x$处连续. 由于$x$是空间$(X, \mathscr{T})$的随意一点，可见$f$是空间$(X, \mathscr{T})$到空间$(Y, \mathscr{T}^*)$内的一个连续函数.]

(5.7) **系** 拓扑空间X到拓扑空间Y内的函数f是连续的$\Leftrightarrow \forall Y$的闭集$F$，$f^{-1}(F)$总是$X$的闭集；即$f$反射闭集.

证 这是因为，根据(0.4.9)我们有$f^{-1}(\mathscr{C} F)=\mathscr{C} f^{-1}(F)$.]

(5.8) **定理** 拓扑空间X到拓扑空间Y内的函数f是连续的$\Leftrightarrow \forall X$的点集$A$，总有$f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$.

证 $\Rightarrow$. 设A是空间X的一个任意点集. 那末，显然

$$f^{-1}[f(A)]\subset f^{-1}[\overline{f(A)}].$$

但是由(0.4.9)，我们有 $A\subset f^{-1}[f(A)]$. 因此，$A\subset f^{-1}[\overline{f(A)}]$. 从 f 的连续性及(5.7)推出，$f^{-1}[\overline{f(A)}]$ 闭于空间 X 中，所以由定义(4.4)推出，$\overline{A}\subset f^{-1}[\overline{f(A)}]$. 再引用一次(0.4.9)就得到 $f(\overline{A})\subset\overline{f(A)}$.

$\Leftarrow$. 设 F 是空间 Y 的任意闭集. 由于条件满足，根据(0.4.9)，

$$f[\overline{f^{-1}(F)}]\subset\overline{f[f^{-1}(F)]}\subset\overline{F}=F;$$

因此，
$$\overline{f^{-1}(F)}\subset f^{-1}\{f[\overline{f^{-1}(F)}]\}\subset f^{-1}(F).$$

但是 $f^{-1}(F)\subset\overline{f^{-1}(F)}$. 由此可见，$\overline{f^{-1}(F)}=f^{-1}(F)$. 根据(4.6)，$f^{-1}(F)$ 是空间 X 的闭集. 于是从(5.7)推出，f 是连续的. ▌

例 22 任何拓扑空间 X 到 X 上的恒等函数是连续的. 又空间 X 到任何拓扑空间 Y 内的常值函数也是连续的.

(5.9) **定理** 设 X、Y 及 Z 是随意的拓扑空间，又 $f:X\to Y$, $g:Y\to Z$. 那末，f 与 g 连续 $\Rightarrow gf$ 连续.

证 这是因为，根据(0.4.14)，$\forall Z$ 的开集 U，

$$(gf)^{-1}(U)=f^{-1}[g^{-1}(U)],$$

而等式的右端是空间 X 的开集. ▌

3° 函数的极限与连续性 我们在下面把《数学分析》中为人们所熟知的函数的极限的概念推广到拓扑空间中去，并且如同在数学分析中一样，把它与函数的连续性联系起来.

(5.10) **定义**① 令 A 为拓扑空间 X 的任一非空点集，

① 本书初稿(即北京师范大学油印本)关于函数极限的定义原为 C. Chevalley 在1946年为普林斯顿大学数学专业研究生所开设《实变函数论》课中所下，但是诚如杨亚东同志私人向我指出的，上述定义是有缺陷的，现已为我所改正. 定理(5.11)与(5.12)的证明也因之而略有所修改. 在修改过程中，贺昌政同志对(5.12)证明的简化，也提出了很好的意见. ——李孝传注.

$x_0\in\bar{A}$，并令 f 为点集 A 到拓扑空间 Y 内的一个函数．如果 $\exists y_0\in Y$，s. t. $\forall y_0$ 的开邻域 V，$\exists x_0$ 的开邻域 U，s. t. 当 $x_0\in A'$ 时，有

$$f(U\cap A-\{x_0\})\subset V,\text{否则有 } f(U\cap A)\subset V\text{①},$$

那末，我们就说，当点 x 在 A 中趋近于 x_0 时，$f(x)$ 有一个极限 y_0，并记作

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\x\in A}} f(x)=y_0. \tag{8}$$

如果 $A=X$，则(8)将写成

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=y_0,$$

读作：当 x 趋近于 x_0 时，$f(x)$ 以 y_0 为它的极限，或者读作：当 x 趋近于 x_0 时，$f(x)$ 趋近于它的极限 y_0．在这一情形下，由于

$$U\cap A=U\cap X=U,$$

条件 $f(U\cap A-\{x_0\})\subset V$ 与条件 $f(U\cap A)\subset V$ 当然应该分别写成

$$f(U-\{x_0\})\subset V\text{ 与 }f(U)\subset V.$$

显而易见，当 $x_0\in\bar{A}$ 但 $x_0\notin A'$ 时，即当 x_0 为 A 的孤点时，可取 $y_0=f(x_0)$；于是有

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\x\in A}} f(x)=f(x_0).$$

这是因为，此时必有点 x_0 的一个开邻域 U，s. t.

$$U\cap A=\{x_0\}\subset A.$$

于是对于 $f(x_0)$ 的任何开邻域 V 总有

$$f(U\cap A)=f(\{x_0\})=\{f(x_0)\}\subset V.$$

---

① 西南师范学院数学系副教授罗四维同志私人向我指出，这两个条件可以合并为如下的一个条件：

$$f[(U\cap A)-(\{x_0\}\cap A')]\subset V$$

这显然是对的。——李孝传注。

定义(5.10)中的极限 y_0 不必是唯一的.

例 23 取例18中的拓扑空间 $(X, \mathscr{T})$ 作为空间 Y: $Y=(X, \mathscr{T})$, 并以 $\tilde{X}$ 表示 a、b、c、d 四个元素作成的离散空间; 令 $f=e$, $e:\tilde{X}\to Y$ 为恒等函数. 如此, 显然 $\lim\limits_{x\to b} f(x)$ 可以是空间 Y 中任何一点. 又 $\lim\limits_{x\to c} f(x)$ 也有同样的情形. 注意此时空间 $\tilde{X}$ 的每个点都是它的孤点.

(5.11) **定理** 设 f 是空间 X 到空间 Y 内的一个函数. f 连续 $\Leftrightarrow \forall$ 非空的 $A\subset X \land \forall x_0\in \overline{A}$, $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x\in A}} f(x)=f(x_0)$.

证 $\Rightarrow$. 如果 x_0 是 A 的孤点, 则由上所述, 显然

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in A}} f(x)=f(x_0) \tag{*}$$

成立. 如果 $x_0\in A'$, 又 V 是空间 Y 中点 $f(x_0)$ 的任意开邻域, 那末, 因为 $f:X\to Y$ 连续, 所以 $U=f^{-1}(V)$ 是空间 X 中点 x_0 的一个开邻域. 由于

$$\begin{aligned} f(U\cap A-\{x_0\})\subset f(U\cap A)=f(A\cap f^{-1}(V))\\ \subset f(A)\cap V\subset V, \end{aligned}$$

根据定义(5.10), 我们看出, (*)也成立.

$\Leftarrow$. 我们首先去证明:

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in A}} f(x)=y_0 \Rightarrow y_0\in \overline{f(A)}.$$

事实上, $\forall y_0$ 的开邻域 V, $\exists x_0$ 的开邻域 U, s. t. 当 $x_0\notin A'$ 时有 $f(U\cap A)\subset V$, 而当 $x_0\in A'$ 时有 $f(U\cap A-\{x_0\})\subset V$. 但是我们总有 $U\cap A\neq\emptyset$, 从而有 $f(U\cap A)\neq\emptyset$; 而当 $x_0\in A'$ 时, 又有 $U\cap A-\{x_0\}\neq\emptyset$, 从而有 $f(U\cap A-\{x_0\})\neq\emptyset$. 因为当 $x_0\notin A'$ 时有 $f(U\cap A)\subset f(A)\cap V$, 而当 $x_0\in A'$ 时有 $f(U\cap A-\{x_0\})\subset f(A)\cap V$, 所以在任何情形下总有 $f(A)\cap V\neq\emptyset$. 由此可见,

$y_0\in\overline{f(A)}$. 既然

$$x_0\in\overline{A}\Rightarrow\lim_{\substack{x\to x_0\\x\in A}}f(x)=f(x_0)\in\overline{f(A)},$$

那就应该有 $f(\overline{A})\subset\overline{f(A)}$. 于是根据定理(5.8), 函数 f 连续. ▌

(5.12) **定理** 设 $f:X\to Y$. f 连续 $\Leftrightarrow\forall x_0\in X$,

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0).$$

证 我们只须证明:

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)\Leftrightarrow\forall A\subset X\ni\cdot x_0\in\overline{A},\ 总有\ \lim_{\substack{x\to x_0\\x\in A}}f(x)=f(x_0).$$

现在证明如下:

$\Leftarrow$. 显而易见.

$\Rightarrow$. 如果 x_0 是 A 的孤点, 则前面已经提到, 我们必然有 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\x\in A}}f(x)=f(x_0)$. 如果 $x_0\in A'$, 则 $x_0\in X'$. 任取空间 Y 中点 $f(x_0)$的开邻域 V, $\exists x_0$ 的开邻域 U, s.t. $f(U-\{x_0\})\subset V$. 但是, $U\cap A-\{x_0\}\subset U-\{x_0\}$. 所以当然更有

$$f(U\cap A-\{x_0\})\subset V. ▌$$

例 24 令 $A=\mathbb{R}-\{0\}$, 并且 $\forall x\in A$ 令

$$f(x)=\frac{\sin x}{x};$$

于是 $f:A\to\mathbb{R}$, 又 $0\in\overline{A}$. 众所周知 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x\in A}}f(x)=1$. 如果令 $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 的定义如下:

$$\forall x\in A,\ \varphi(x)=f(x)\ 又\ \varphi(0)=1,$$

则 φ 是 f 在 $\mathbb{R}$ 上的连续开拓. 令

$$B=\ ]-\infty,\ -1]\cup\{0\}\cup[1,\ +\infty[,$$

并令 $\psi=\varphi|B$, 则 0 是 B 的一个孤点, 并且

$$\lim_{\substack{x\to 0\\x\in B}}\psi(x)=1.$$

4. 同胚与等距映射 众所周知，$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 上的任何一个仿射变换 f(即系数行列式不为零的线性变换)，虽然并不一定保持 $\mathbb{R}^n$ 中两点之间的距离不变，但却是一个连续的双一一函数，而且它的反函数 f^{-1}(即逆变换)也是一个仿射变换，因而 f^{-1} 也是连续的。还可以举出一些与此类似的例子．"同胚"或"拓扑变换"的概念就是由这样一些变换的概念中抽出如下的共同点形成的：变换是连续的双一一函数，并且它们的逆变换也是连续的．

(5.13) **定义** 设 X 与 Y 是两个随意的拓扑空间，并设 $f: X \to Y$．如果 f 是连续的双一一函数，并且它的反函数 f^{-1} 也是连续的，那末，f 就叫做空间 X 到空间 Y 上的一个**同胚或拓扑映射或拓扑变换**；此时空间 X 与空间 Y 叫做**同胚的**，记作 $X \approx Y$①．

如果 f 是空间 X 到空间 Y 上的一个同胚，$A \subset X$，并且 $B = f(A)$，则称点集 A 与点集 B 是同胚的，记作 $A \approx B$；此时又称点集 B 是点集 A 在同胚 f 之下的**同胚象或拓扑象**．

同样地，如果 $f: X \to Y$，f 连续，并且 $A \subset X$，则 $f(A)$ 称为点集 A 在映射 f 之下的**连续象**．如果 $f(X) = Y$，则空间 Y 称为空间 X 在映射 f 之下的**象空间**．

当 f 是空间 X 到空间 Y 上的连续双一一函数时，f^{-1} 不必是连续的．现在举例说明如下：

例 25 令 $X = (\mathbb{R}^n, d_0)$，$Y = (\mathbb{R}^n, d)$，即 X 为一离散空间，Y 为 n 维欧氏空间．若取恒等函数 $e: X \to Y$，则 e 为连续，但是 $e^{-1}: Y \to X$ 显然不连续，因为 X 的任何单点集 $\{a\}$ 为 X 的开集，而 $(e^{-1})^{-1}(\{a\}) = e(\{a\}) = \{a\}$ 在 Y 中只闭不开．

由此可见，连续的双一一函数不一定是同胚．

显而易见，恒等函数 $e: X \to X$ 是随意的拓扑空间 X 到它自

① 当 $X \approx Y$ 时，也常称空间 X 与 Y 拓扑等价．见 J. L. Kelley, General Topology, p. 87.

身上的一个同胚．如果 f 是空间 X 到空间 Y 上的一个同胚，则 f^{-1} 是 Y 到 X 上的一个同胚．又从(5.9)立即看出，如果 f 是空间 X 到空间 Y 上的一个同胚，g 是 Y 到空间 Z 上的一个同胚，则复合函数 gf 是 X 到 Z 上的一个同胚．由此可见，空间的同胚关系 $\approx$ 是一个等价关系：

(5.14) 设 X、Y、Z 是拓扑空间．那末，

1° $X\approx X$；

2° $X\approx Y\Rightarrow Y\approx X$；

3° $X\approx Y\wedge Y\approx Z\Rightarrow X\approx Z$.

同理，拓扑空间中点集的同胚也是一个等价关系．

(5.15) **定义** 如果任何拓扑空间或者它的点集的性质能在每个拓扑变换下都保持不变，那末，这个性质就叫做**拓扑性质**．

集合之为开集、闭集、点集的闭包与导集、点的邻域、序列的收敛性以及第四节第 4、5 两款中所列举的点集的性质都是拓扑性质．

拓扑学就是研究拓扑空间及其点集的拓扑性质的一门数学．

我们在下面去讨论度量空间到度量空间上保持距离不变的一类映射．结果表明，这也是一类特殊的同胚．

(5.16) **定义** 设 (X, d) 及 (Y, d') 是两个随意的度量空间，f 是 X 到 Y 上的一个满函数．如果

$$\forall(x, x')\in X\times X,$$

总有
$$d'(f(x), f(x'))=d(x, x').$$

那末，f 就叫做空间 X 到空间 Y 上的一个**等距映射**或**等距变换**；此时空间 X 与 Y 称为**等距的**或**合同的**．

根据定义(5.16)，我们有下面的一些推论：

(5.17) 凡等距映射都是单函数，因此是双一一函数．

证 这是因为

$f(x)=f(x')\Rightarrow d'(f(x), f(x'))=0=d(x, x')\Rightarrow x=x'$. ❙

由(5.17)可知，每个等距映射 f 都有反函数 f^{-1}，或者换句话说，每个等距变换 f 都有逆变换 f^{-1}.

(5.18) 凡等距变换 f 的逆变换 f^{-1} 也是等距的.

证 $\forall(y, y')\in Y\times Y$，令 $f^{-1}(y)=x$, $f^{-1}(y')=x'$；则 $(x, x')\in X\times X$，并且 $f(x)=y$, $f(x')=y'$. 于是有

$$d(f^{-1}(y), f^{-1}(y'))=d(x, x')=d'(f(x), f(x'))=d'(y, y')$$

所以从定义(5.16)看出，f^{-1} 是等距变换. ❙

(5.19) 凡等距变换 f 都是连续的.

证 这是因为，

$$\forall\varepsilon>0, \exists\delta=\varepsilon, \ni\cdot\forall(x, x')\in X\times X, d(x, x')<\delta$$
$$\Rightarrow d'(f(x), f(x'))=d(x, x')<\varepsilon. ❙$$

由(5.18)及(5.19)立即得到

(5.20) **定理** 所有的等距变换都是同胚.

(5.21) **定义** 如果度量空间或者它的点集的一个性质在任何等距映射下保持不变，但却不能在每个同胚下保持不变，那末，这个性质就叫做**度量性质**.

度量空间中两点之间的距离以及一点的球形邻域都是度量性质.

拓扑学也附带地研究一些度量性质，但主要是通过对这种性质的探讨来阐发拓扑性质.

例 26 凡 n 维欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 到它自身的正交变换都是等距映射，反之亦然. 特别地，实直线 $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 上的任意等距映射 f 为 $x\to x'=\pm x+a$，其中 $a\in\mathbb{R}$. 又开区间 $]-1, 1[$ 作为实直线 $\mathbb{R}$ 的(度量)子空间显然是与 $\mathbb{R}$ 同胚的. 事实上，

$$\forall x\in\ ]-1, 1[\ ,\quad 令 f: x\to \operatorname{tg}\frac{\pi}{2}x;$$

则见 f 是 $]-1, 1[$ 到 $\mathbb{R}$ 上的一个拓扑映射. 但 $]-1, 1[$ 与 $\mathbb{R}$ 明显地不是等距的.

例 27 设 S^2 表示单位球面: $x_1^2+x_2^2+x_3^2=1$, 令 z 表示它的"北极"$(0,0,1)$; 则通过**球极平面射影**[①](stereographic projection)立即看出"刺孔球面"$S^2-\{z\}$与平面 $x_3=-1$ 同胚, 从而与坐标平面$\mathbb{R}^2$同胚: $S^2-\{z\}\approx\mathbb{R}^2$.

六、子空间·积空间·商空间

本节所讨论的三类空间具有一个共同的内容,即通过一族(这一族也许是一个单元族)已知的拓扑空间,在一个与之密切联系着的集合上构造一个最小或最大的拓扑, 使与这些已知和新构造的空间自然地相关联的函数都连续. 因此,作为理论上的指导,我们不妨先讨论这一共性.

1. 集合上使一族函数都连续的最大与最小拓扑 设 $\{(Y_\alpha, \mathscr{T}_\alpha)\}_{\alpha\in I}$ 是任意给定的拓扑空间的一个非空族, X 是任一非空集合,并设

$$\forall\alpha\in I,\ f_\alpha: X\to Y_\alpha.$$

显而易见, X 上的离散拓扑 $\mathscr{T}_0=\mathscr{P}(X)$ 是使所有的 f_α 都连续的 X上的最大拓扑. 不过这个拓扑太大,以致使空间$(X, \mathscr{T}_0)$没有任何聚点, 不能满足我们今后的要求. 这是一个一般说来无足轻重的拓扑. 集合 X 上另外还有一个无足轻重的拓扑, 那就是 X 上最小的拓扑 $\{\emptyset, X\}$, 但这个拓扑不一定能使所有的函数 f_α 都连续,因为如果

---

① 参阅 M. H. A. Newman, Elements of the Topology of Plane Sets of Points, 1954, pp. 64—65.

$$\exists U_\alpha \in \mathscr{T}_\alpha,\ \text{s.t.}\ f_\alpha^{-1}(U_\alpha) \neq \emptyset,\ f_\alpha^{-1}(U_\alpha) \neq X,$$

则关于拓扑$\{\emptyset, X\}$，f_α将不连续，而这种情形是完全可能发生的．那末，能使所有的f_α都连续的X上的拓扑中间，有没有一个最小的拓扑呢？这个问题的答案是肯定的．

(6.1) **定理** 在集合X上能使每个f_α都连续的拓扑中间必然存在一个最小拓扑．

证 令

$$\mathscr{S} = \{U \subset X \mid \exists \alpha \in I \wedge \exists W_\alpha \in \mathscr{T}_\alpha \ni \cdot U = f_\alpha^{-1}(W_\alpha)\}.$$

于是使得每个f_α都连续的X上的拓扑必须都包含$\mathscr{S}$，反之亦然．因此，根据定理(3.11)，存在着X上包含$\mathscr{S}$的所有拓扑中的最小拓扑，它就是X上由集合类$\mathscr{S}$所生成的拓扑，也就是使每个函数f_α都连续的X上的最小拓扑．】

当空间族$\{(Y_\alpha, \mathscr{T}_\alpha)\}_{\alpha \in I}$是一个单元族(即标号集$I$为单元集)时，上面问题的回答要简单得多．这时使$f: X \to Y$连续的$X$上的最小拓扑就是定理(6.1)证明中的集合类$\mathscr{S}$．

(6.2) **定理** 设f是非空集合X到拓扑空间$(Y, \mathscr{T}_*)$内的一个函数；令

$$\mathscr{T} = \{U \subset X \mid \exists V \in \mathscr{T}_* \ni \cdot U = f^{-1}(V)\},$$

那末，$\mathscr{T}$就是X上能使f连续的最小拓扑．

证 我们只须证明$\mathscr{T}$是X上的一个拓扑，至于定理中剩下的部分则是显而易见的．为此，设$\{U_\lambda\}_{\lambda \in I}$是集合类$\mathscr{T}$中元素的任一有限族．那末，

$$\forall \lambda \in I,\ \exists V_\lambda \in \mathscr{T}_* \ni \cdot U_\lambda = f^{-1}(V_\lambda).$$

于是根据(0.5.11)，

$$\bigcap_{\lambda \in I} U_\lambda = \bigcap_{\lambda \in I} f^{-1}(V_\lambda) = f^{-1}\left(\bigcap_{\lambda \in I} V_\lambda\right).$$

既然$\mathscr{T}_*$是Y上的一个拓扑，那就应该有$\bigcap_{\lambda \in I} V_\lambda \in \mathscr{T}_*$，于是由集合类$\mathscr{T}$的定义看出，$\bigcap_{\lambda \in I} U_\lambda \in \mathscr{T}$．同理，根据(0.5.11)可知，

当 $\{U_\mu\}_{\mu\in J}$ 为 $\mathscr{T}$ 中元素的随意族时，必有 $\bigcup_{\mu\in J} U_\mu \in \mathscr{T}$.

可见 $\mathscr{T}$ 满足开集公理 T1 与 T2，所以 $\mathscr{T}$ 是 X 上的一个拓扑. ▌

(6.3) **定理** 设 $\{(X_\alpha, \mathscr{T}_\alpha)\}_{\alpha\in I}$ 是拓扑空间的一个非空族，Y 是一个随意给定的非空集合，并设 $\forall \alpha\in I$, $f_\alpha: X_\alpha\to Y$. 那末，在集合 Y 上存在着能使每个 f_α 都连续的最大拓扑.

证 令

$$\mathscr{T}^* = \{U\subset Y \mid \forall \alpha\in I,\ f_\alpha^{-1}(U)\in \mathscr{T}_\alpha\}.$$

我们去证明 $\mathscr{T}^*$ 是 Y 上的一个拓扑. 为此，设 $\{U_i\}_{i\in J}$ 是 $\mathscr{T}^*$ 中元素的一个有限族. 那末，

$$\forall i\in J \wedge \forall \alpha\in I,\ f_\alpha^{-1}(U_i)\in \mathscr{T}_\alpha.$$

于是 $\forall \alpha\in I$,

$$\bigcap_{i\in J} f_\alpha^{-1}(U_i) = f_\alpha^{-1}\left(\bigcap_{i\in J} U_i\right)\in \mathscr{T}_\alpha.$$

因此，$\bigcap_{i\in J} U_i\in \mathscr{T}^*$. 设 $\{U_k\}_{k\in K}$ 为 $\mathscr{T}^*$ 的任意一族元素. 同样地，$\forall \alpha\in I$,

$$\bigcup_{k\in K} f_\alpha^{-1}(U_k) = f_\alpha^{-1}\left(\bigcup_{k\in K} U_k\right)\in \mathscr{T}_\alpha,$$

故 $\bigcup_{k\in K} U_k\in \mathscr{T}^*$. 集合类 $\mathscr{T}^*$ 既然满足开集公理 T1 和 T2，因此 $\mathscr{T}^*$ 是 Y 上的一个拓扑.

剩下的是要去证明，$\mathscr{T}^*$ 是能使每个 f_α 连续的最大拓扑. 设 $\mathscr{T}_*$ 是能使所有的 f_α 连续的 Y 上的一个拓扑. 那末，显而易见，

$$U\in \mathscr{T}_* \Rightarrow \forall \alpha\in I,\ f_\alpha^{-1}(U)\in \mathscr{T}_\alpha \Rightarrow U\in \mathscr{T}^*.$$

因此，$\mathscr{T}_*\subset \mathscr{T}^*$. ▌

很明显，在定理(6.3)的条件下，Y 上的最小拓扑 $\{\emptyset, Y\}$ 必能使所有的函数 f_α 连续，而 Y 上的离散拓扑则不一定能使所有的 f_α 连续. 作为定理(6.3)的特例，我们有：

(6.4) **系** 设 f 是拓扑空间 $(X, \mathscr{T})$ 到一个非空集合 Y 内的函数. 那末，在 Y 上存在着能使 f 连续的最大拓扑.

这个最大拓扑称为关于拓扑$\mathscr{T}$和函数f的**商拓扑**，记作$\mathscr{T}/f$.

2. 拓扑空间的子空间　设$(X, \mathscr{T})$是任意给定的一个拓扑空间，$A\subset X$, $A\neq\emptyset$. 试看内射函数$i:A\hookrightarrow X$. 根据定理(6.2)，A上使内射函数i连续的最小拓扑是

$$\mathscr{T}/A=\{U\subset A\mid \exists V\in\mathscr{T}\ni\cdot U=i^{-1}(V)=A\cap V\}$$
$$=\{A\cap V\mid V\in\mathscr{T}\}.$$

(6.5)　**定义**　拓扑空间$(A, \mathscr{T}/A)$叫做拓扑空间$(X, \mathscr{T})$的**子空间**. 子空间$(A, \mathscr{T}/A)$的任何开集又叫做子空间的**相对开集**，或者说它相对地开于空间$(A, \mathscr{T}/A)$中.

以后拓扑空间$(X, \mathscr{T})$的任何子空间$(A, \mathscr{T}/A)$将简单地写成A. 于是拓扑空间$(X, \mathscr{T})$的任何非空点集A都可以看成它的子空间，其中的拓扑就是所谓对于A的**相对拓扑**$\mathscr{T}/A$.

例28　由定理(2.14)看出，度量空间(X, d)的任何度量子空间A同时也是由d导致的拓扑空间$(X, \mathscr{T}_d)$的子空间$(A, \mathscr{T}_d/A)$.

例29　试看单位圆周：

$$S=\{(x, y)\in\mathbb{R}^2\mid x^2+y^2=1\},$$

S作为二维欧氏空间$\mathbb{R}^2$的子空间，它的相对开集由开弧所构成. S显然并非一维欧氏空间. 又平面或三维欧氏空间中任何图形都可以看成是它们的子空间.

(6.6)　设A是拓扑空间X的一个子空间，$G\subset A$. G是子空间A的闭集$\Leftrightarrow\exists X$的一个闭集F, s. t. $G=A\cap F$.

证　$\Rightarrow$. G是子空间A的闭集$\Rightarrow A-G$相对地开于子空间A中$\Rightarrow\exists X$的开集U, s. t. $A-G=A\cap U\Rightarrow\exists X$的开集$U$, s. t. $G=A\cap\mathscr{C}U$，于此$\mathscr{C}U$是X的闭集.

$\Leftarrow$. $G=A\cap F\Rightarrow A-G=A\cap \mathscr{C}F$, F 闭于 X 中. 可见 $A-G$ 相对地开于 A 中. 故 G 是子空间 A 的闭集. ▌

(6.7) **定义** 子空间 A 的闭集又叫做 A 的**相对闭集**，或说它相对地闭于子空间 A 中.

拓扑空间 X 的子空间 A 的相对开集显然不必是 X 的开集，这从例 29 就可以看出. 子空间 A 的相对闭集也不必是空间 X 的闭集；例如开区间 $]a, b[$ 相对地闭于实直线 $\mathbb{R}$ 的子空间 $A=]a, b[$ 中，但 $]a, b[$ 不是 $\mathbb{R}$ 的闭集.

下面的命题的真实性是很明显的.

(6.8) 拓扑空间 X 的子空间 A 的每个相对开集(闭集)同时也是空间 X 的开集(闭集)，当而且仅当，作为点集，A 开(闭)于 X 中.

(6.9) 设 X 与 Y 是拓扑空间，A 是 X 的子空间. 如果 $f: X\to Y$ 连续，那末，f 在 A 上的限制 $f|A$ 也连续.

证 事实上，因为 $i: A\subsetneq X$ 与 $f: X\to Y$ 都连续，并且 $f|A=fi$，所以由(5.9)推出，$f|A$ 连续. ▌

既然拓扑空间 X 的子空间 A 也是一个拓扑空间，那末对子空间 A 的任意点集 B 来说，我们当然可以谈到它在子空间 A 中的闭包、导集等等. 总之，第四节中提到的拓扑概念，在子空间 A 中都有意义. 但是子空间 A 的相对开集既然不必是空间 X 的开集，那末，这种情形对其他拓扑概念也可能产生. 例如，子空间 A 的点集 B 在 A 中的闭包显然是 B 在 X 中的闭包与 A 的交集，因而这两个闭包只有"被包含"的关系，而不必相等.

3. 积空间 n 维欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 可以看成是实直线 $\mathbb{R}$ 的 n 次自乘积，其中由 n 维欧氏度量 d 所导致的拓扑 $\mathscr{T}_d$ 显然能使每个坐标函数连续；而且我们将会看到，拓扑 $\mathscr{T}_d$ 是使 $\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 上的每个坐

标函数都连续的最小拓扑. 把这个事实加以推广，我们就得到"积空间"的概念.

设 $\{(X_\alpha, \mathscr{T}_\alpha)\}_{\alpha\in I}$ 是任意给定的一族拓扑空间，$I\neq\emptyset$. 令 $X=\prod_{\alpha\in I}X_\alpha$. 根据定理(6.1)，存在着 X 上能使每个坐标函数 $p_\alpha: X\to X_\alpha$ 都连续的最小拓扑 $\mathscr{T}$.

(6.10) **定义** 这个拓扑 $\mathscr{T}$ 叫做笛卡尔积 X 上的**积拓扑**；拓扑空间 $(X, \mathscr{T})$ 叫做已知空间族 $\{(X_\alpha, \mathscr{T}_\alpha)\}_{\alpha\in I}$ 或所有空间 X_α 的**积空间**，记作

$$\prod_{\alpha\in I}(X_\alpha, \mathscr{T}_\alpha): (X, \mathscr{T})=\prod_{\alpha\in I}(X_\alpha, \mathscr{T}_\alpha).$$

当不致产生误会时，积空间 $(X, \mathscr{T})$ 又可以简记作 X 或 $\prod_{\alpha\in I}X_\alpha$.

设 $(Y, \mathscr{T}_*)$ 是一个随意的拓扑空间，并设 $\mathscr{T}_*^n$ 及 $\mathscr{T}_*^\infty$ 分别是 Y^n 及 Y^∞ 上的积拓扑. 那末积空间 $(Y^n, \mathscr{T}_*^n)$ 与 $(Y^\infty, \mathscr{T}_*^\infty)$ 分别称为空间 $(Y, \mathscr{T}_*)$ 的 **n 次及无穷次积空间**，也可以分别简称为空间 Y 的 **n 次及无穷次积**，并分别简写成 Y^n 及 Y^∞.

为了说明积拓扑的结构，我们先取两个空间 $(X_1, \mathscr{T}_1)$ 与 $(X_2, \mathscr{T}_2)$ 的积空间 $(X_1\times X_2, \mathscr{T})$ 为例. 由定理(6.1)的证明看出

$$\mathscr{S}=\{U\in\mathscr{P}(X_1\times X_2)\mid\exists W\in\mathscr{T}_1\cup\mathscr{T}_2\ni\cdot$$
$$U=p_1^{-1}(W)\vee U=p_2^{-1}(W)\}$$

是拓扑 $\mathscr{T}$ 的一个亚基. 但是对于任意的 $i(i=1, 2)$,

$$W_i^{(k)}\in\mathscr{T}_i(k=1, 2, 3, \cdots, n)\Rightarrow\bigcap_{k=1}^n W_i^{(k)}\in\mathscr{T}_i,$$

又 $$\bigcap_{k=1}^n p_i^{-1}(W_i^{(k)})=p_i^{-1}\left(\bigcap_{k=1}^n W_i^{(k)}\right), \ (i=1, 2)$$

由此可见，

$$\mathscr{B}=\{U\in\mathscr{P}(X_1\times X_2)\mid\exists W_1\in\mathscr{T}_1\wedge\exists W_2\in\mathscr{T}_2\ni\cdot$$
$$U=p_1^{-1}(W_1)\cap p_2^{-1}(W_2)\}$$

是积拓扑 $\mathscr{T}$ 的一个基. 但是根据(0.5.16)，

$$p_1^{-1}(W_1)\cap p_2^{-1}(W_2)=W_1\times W_2.$$

因此，

$\mathscr{B}=\{U\in\mathscr{P}(X_1\times X_2)\,|\,\exists(W_1,W_2)\in\mathscr{T}_1\times\mathscr{T}_2\ni\cdot U=W_1\times W_2\}$.

于是根据定理(3.6)，我们得到下面的命题：

(6.11) 积空间 $X_1\times X_2$ 的点集 V 开于空间 $X_1\times X_2$ 中 $\Leftrightarrow$ $\forall x\in V$, $\exists X_1$ 的一个开集 W_1 及 X_2 的一个开集 W_2, s. t.

$$x\in W_1\times W_2\wedge W_1\times W_2\subset V.$$

如果空间$(X_1,\ \mathscr{T}_1)$的拓扑 $\mathscr{T}_1$ 有一个基 $\mathscr{B}_1$, 空间$(X_2,\ \mathscr{T}_2)$的拓扑 $\mathscr{T}_2$ 有一个基 $\mathscr{B}_2$, 那末积拓扑的基可以提炼成

$$\mathscr{B}_*=\{U\in\mathscr{P}(X_1\times X_2)\,|\,\exists(W_1,\ W_2)\in\mathscr{B}_1\times\mathscr{B}_2\ni\cdot U=W_1\times W_2\}.$$

事实上, $\forall(U_1,\ U_2)\in\mathscr{T}_1\times\mathscr{T}_2$, $\exists\mathscr{B}_1$ 中的一个族 $\{W_i^{(1)}\}_{i\in I}$ 与 $\mathscr{B}_2$ 中的一个族$\{W_k^{(2)}\}_{k\in K}$, s. t.

$$U_1=\bigcup_{i\in I}W_i^{(1)},\qquad U_2=\bigcup_{k\in K}W_k^{(2)}.$$

但是容易证明

$$U_1\times U_2=\bigcup_{i\in I}W_i^{(1)}\times\bigcup_{k\in K}W_k^{(2)}=\bigcup_{(i,k)\in I\times K}W_i^{(1)}\times W_k^{(2)}.$$

由此可见, $\mathscr{B}_*$ 的确是积拓扑 $\mathscr{T}$ 的一个基. 这就证明了下面的命题：

(6.12) 如果空间$(X_1,\ \mathscr{T}_1)$与空间$(X_2,\ \mathscr{T}_2)$的拓扑 $\mathscr{T}_1$ 与 $\mathscr{T}_2$ 分别以 $\mathscr{B}_1$ 与 $\mathscr{B}_2$ 为它们的基，则上述 $\mathscr{B}_*$ 是积拓扑 $\mathscr{T}$ 的基. 换句话说，

$$V\in\mathscr{T}\Leftrightarrow\forall x\in V,\ \exists W_1\in\mathscr{B}_1\wedge\exists W_2\in\mathscr{B}_2\ni\cdot x\in W_1\times W_2\subset V.$$

例 30 试看实直线 $\mathbb{R}$ 的二次积空间$(\mathbb{R}^2,\ \mathscr{T})$以及二维欧氏空间$(\mathbb{R}^2,\ \mathscr{T}_d)$，其中 $\mathscr{T}_d$ 是二维欧氏度量 d 所导致的拓扑. 不难看出, $\mathscr{T}=\mathscr{T}_d$, 从而积空间$(\mathbb{R}^2,\ \mathscr{T})$就是二维欧氏空间$(\mathbb{R}^2,\ \mathscr{T}_d)$. 事实上, 所有有限开区间（又称一维线段）$]a,\ b[$ $(a<b)$ 组成了 $\mathbb{R}$ 上的自然拓扑(即一维欧氏拓扑)的一个基. 因此根据(6.12)，所

有的二维线段(即矩形的内部,又称开矩形)

$$]a,\ b[\times]c,\ d[\ (c<d).$$

组成积拓扑 $\mathscr{T}$ 的一个基 $\mathscr{B}_*$. 又二维欧氏(度量)空间 $(\mathbb{R}^2, d)$ 中的所有开圆组成拓扑 $\mathscr{T}_d$ 的一个基 $\mathscr{B}_d$. 现在任取一个 $V\in\mathscr{T}_d$, 并且任取一点 $z=(x, y)\in V$. 于是必有

$$\text{开圆 } B(z, r)\in\mathscr{B}_d\ \ (r>0)\ \ \text{s. t. } B(z, r)\subset V.$$

若取正数 $\varepsilon<r$, 并令 $\delta=\sqrt{r^2-\varepsilon^2}$, 则见

$$z\in]x-\varepsilon,\ x+\varepsilon[\times]y-\delta,\ y+\delta[\subset B(z, r)\subset V.$$

这样,从(6.12)看出,$V\in\mathscr{T}$. 因此,$\mathscr{T}_d\subset\mathscr{T}$. 同理,因为对于任何二维线段 $R\in\mathscr{B}_*$ 以及任何一点 $z\in R$,

$$\exists\,\delta>0,\ \text{s. t. 开圆 } B(z, \delta)\subset R,$$

所以

$$V\in\mathscr{T}\Rightarrow V\in\mathscr{T}_d.$$

由此可见,$\mathscr{T}=\mathscr{T}_d$. 这同时也就证明了在平面 $\mathbb{R}^2$ 上,由欧氏度量所导致的拓扑 $\mathscr{T}_d$ 是使坐标函数 p_1 与 p_2 都连续的最小拓扑.

以上所说很容易推广到任意有限个空间的积空间去. 比如说我们去推广例 30 中提到的一维及二维线段的概念: 设实数 $a_i<b_i$ $(i=1, 2, \cdots, n)$. 令 $\lambda_i=]a_i,\ b_i[$, $I^n=\prod_{i=1}^n\lambda_i$; 则 I^n 称为 n 维欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 中的 **n 维线段**或 **n 维开长方体**; 又 $P^n=\prod_{i=1}^n\bar{\lambda}_i$ 称为 **n 维超平行体**或 **n 维长方体**, 其中 $\bar{\lambda}_i=[a_i,\ b_i]$. 显然一维超平行体, 即为有限闭区间 $[a,\ b]\ (a<b)$, 也称**线节**[①] (segment).

现在让我们来讨论一般情形.

(6.13) **定理** 积空间 $(X, \mathscr{T})=\prod_{i\in I}(X_i, \mathscr{T}_i)$ 的一个点集 $W\in\mathscr{T}\Leftrightarrow\forall x\in W\,\exists\, m\in\mathbb{N}\ni\cdot\forall k\in\Delta(m)\exists\, i_k\in I\wedge\exists\, U_{i_k}\in\mathscr{T}_{i_k}\ni\cdot$

$$x\in\prod(U_{i_1},\ U_{i_2},\ \cdots,\ U_{i_m})\subset W.$$

---

① 参考 S. Lefschetz, Algebraic Topology, p. 11. 又此处的线段与线节二术语, 源出于我国《几何基础》中惯用的译名. 故线段不含任何边界点, 而线节则包含其边界.

证 只须证明

$$\mathscr{B}=\{V\in\mathscr{P}(X)\mid\exists m\in\mathbb{N}\ni\cdot\forall k\in A(m)\exists i_k\in I\wedge\exists U_{i_k}\in\mathscr{T}_{i_k}\ni\cdot V=\prod(U_{i_1},\cdots,U_{i_m})\}$$
是积拓扑 $\mathscr{T}$ 的一个基.

事实上，从定理(6.1)的证明看出

$$\mathscr{S}=\{V\in\mathscr{P}(X)\mid\exists i\in I\wedge\exists U_i\in\mathscr{T}_i\ni\cdot V=p_i^{-1}(U_i)\}$$

是积拓扑 $\mathscr{T}$ 的一个亚基，这里 p_i 为积空间 X 到空间 X_i 的 i 坐标映射. 于是 $\mathscr{S}$ 中元素的所有有限交组成积拓扑 $\mathscr{T}$ 的一个基 $\mathscr{B}^*$. 但是，

$$\forall i\in I\wedge U_i^{(k)}\in\mathscr{T}_i\quad(k=1,2,\cdots,m),$$
$$\bigcap_{k=1}^m p_i^{-1}(U_i^{(k)})=p_i^{-1}\left(\bigcap_{k=1}^m U_i^{(k)}\right),$$

而 $\bigcap_{k=1}^m U_i^{(k)}\in\mathscr{T}_i$. 因此

$$\mathscr{B}^*=\{V\in\mathscr{P}(X)\mid\exists m\in\mathbb{N}\ni\cdot\forall k\in A(m)\exists i_k\in I\wedge\exists U_{i_k}\in\mathscr{T}_{i_k}\ni\cdot V=\bigcap_{k=1}^m p_{i_k}^{-1}(U_{i_k})\},$$

可是根据(0.5.16)，

$$\bigcap_{k=1}^m p_{i_k}^{-1}(U_{i_k})=\prod(U_{i_1},U_{i_2},\cdots,U_{i_m}).$$

因此，

$$\mathscr{B}^*=\{V\in\mathscr{P}(X)\mid\exists m\in\mathbb{N}\ni\cdot\forall k\in A(m)\exists i_k\in I\wedge\exists U_{i_k}\in\mathscr{T}_{i_k}\ni\cdot V=\prod(U_{i_1},U_{i_2},\cdots,U_{i_m})\}.$$

由此可见，$\mathscr{B}^*=\mathscr{B}$. 】

我们可以把命题(6.12)推广到一般情形：

(6.14) 设 $(X,\mathscr{T})=\prod_{i\in I}(X_i,\mathscr{T}_i)$，并设 $\mathrm{A}i\in I$，$\mathscr{B}_i$ 是拓扑 $\mathscr{T}_i$ 的一个基.

$$W\in\mathscr{T}\Leftrightarrow\forall x\in W\exists m\in\mathbb{N}\ni\cdot\forall k\in A(m)\exists i_k\in I\wedge\exists U_{i_k}\in\mathscr{B}_{i_k},\text{s.t.}$$
$$x\in\prod(U_{i_1},U_{i_2},\cdots,U_{i_m})\subset W.$$

证明从略. 】

(6.15) **系** 设 $(X,\mathscr{T})=\prod_{i=1}^n(X_i,\mathscr{T}_i)$，并且 $\forall i\in A(n)$，$\mathscr{B}_i$ 是拓扑 $\mathscr{T}_i$ 的一个基. 那末，

$$W \in \mathscr{T} \Leftrightarrow \forall x \in W \wedge \forall i \in A(n),\ \exists U_i \in \mathscr{B}_i \ni \cdot$$
$$x \in \prod_{i=1}^{n} U_i \subset W.$$

换句话说，

$$\mathscr{B} = \{V \in \mathscr{P}(X) \mid \forall i \in A(n),\ \exists U_i \in \mathscr{B}_i \ni \cdot V = \prod_{i=1}^{n} U_i\}$$

是积拓扑 $\mathscr{T}$ 的一个基.

(6.16) **定义** 设 X 与 Y 是两个随意的拓扑空间，并且设 $f: X \to Y$. 如果函数 f 映射开集，即 $\forall X$ 的开集 U, $f(U)$ 总是开集，那末，f 就叫做一个开函数；如果 f 映射闭集，那末 f 就叫做一个闭函数.

显然，凡拓扑映射都既是开函数又是闭函数，但连续函数则不然.

(6.17) **定理** 设 $X = \prod_{i \in I} X_i$ 是一个积空间. 那末，$\forall i \in I$，投影 p_i 都是积空间 X 到空间 X_i 的开函数.

证 设 W 是积空间 X 的一个随意开集. 任取一个标号 如果 $W = \emptyset$，则 $p_{i_*}(W)$ 当然是空间 X_{i_*} 的开集. 设 $W \neq$ 在 $p_{i_*}(W)$ 中任取一点 x_{i_*}. 于是 W 中必有一点 x 它的 i_* x_{i_*}. 根据定理(6.13)，$\exists$ 标号集 I 中的 m 个标号 i_1, i_m 以及空间 X_{i_k} 的开集 U_{i_k} $(k=1, 2, \cdots, m)$, s. t.

$$x \in \prod(U_{i_1}, U_{i_2}, \cdots, U_{i_m}) \subset W.$$

如果 $\forall k \in A(m)$, $i_* \neq i_k$，则显然

$$p_{i_*}(\prod(U_{i_1}, U_{i_2}, \cdots, U_{i_m})) = X_{i_*} \subset p_{i_*}(W),$$

从而 $p_{i_*}(W) = X_{i_*}$，所以 $p_{i_*}(W)$ 是空间 X_{i_*} 的开集. 如果 $\exists k \in A(m)$, s. t. $i_* = i_k$，则

$$p_{i_*}(\prod(U_{i_1}, U_{i_2}, \cdots, U_{i_m})) = U_{i_k},$$

从而 $x_{i_*} \in U_{i_k} \subset p_{i_*}(W)$，于此 U_{i_k} 即 U_{i_*} 是 X_{i_*} 的开集. 由于 x_{i_*} 是 $p_{i_*}(W)$ 中的任意点，可见当 $p_{i_*}(W) \neq X_{i_*}$ 时，它也仍然是空间 X_{i_*} 的开集. 因此任何投影都是开函数. ▌

读者可自行举例说明，投影不必是闭函数.

例 31 设 $X=\{0, 2\}$ 为一离散空间. 那末，$\forall n\in\mathbb{N}$，显然积空间 X^n 仍然是一个离散空间. 然而积空间 X^∞ 却不是离散的. 事实上，$\forall n\in\mathbb{N}$，

$$p_n^{-1}(0)=p_n^{-1}(\{0\})=\{x\in X^\infty \mid x =(x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots)\wedge x_n=0\}$$

和 $$p_n^{-1}(2)=p_n^{-1}(\{2\})=\{x\in X^\infty \mid x =(x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots)\wedge x_n=2\}$$

都是无穷集，并且易见，构成积拓扑的基的每个元素，除空集外，也都是无穷集. 由此可见，积空间 X^∞ 的每个非空开集都是无穷集. 因此，积空间 X^∞ 不是离散的，并且它的每个单点集

$$\{x\}=\{(x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots)\}$$

都不是开集(容易证明，它是闭集). 但是，由于 $\{x\}=\prod_{n=1}^{\infty}\{x_n\}$，而单点集 $\{x_n\}$ 开于 X 中，可见 X 的无穷多个开集的笛卡尔积不一定是积空间 X^∞ 的开集.

4. 函数的分支函数与函数的连续性 在这一款里，我们讨论的是值域是积空间的点集或定义域是积空间的连续函数.

(6.18) **定义** 设 f 是集合 X 到笛卡尔积 $\prod_{\iota\in I} Y_\iota$ 内的一个函数，并令

$$f_\iota=p_\iota f,$$

那末，$f_\iota: X\to Y_\iota$ 叫做函数 f 的 ι 分支函数.

(6.19) **定理** 拓扑空间 X 到积空间 $Y=\prod_{\iota\in I} Y_\iota$ 内的函数 f 连续 $\Leftrightarrow \forall \iota\in I$，$f$ 的 ι 分支函数 f_ι 连续.

证 $\Rightarrow$. 当 f 连续时，因为 $\forall \iota\in I$，投影 p_ι 连续，所以由定义(6.18)看出，$\forall \iota\in I$，f_ι 必然连续.

$\Leftarrow$. 设 f 的每个 ι 分支函数 f_ι 都连续，并设 U 是积空间 Y 的

任一开集. 如果 x 是 $f^{-1}(U)$ 的随意一点, 则 $f(x)\in U$. 根据定理(6.13), $\exists\, m$ 个集合 $U_{i_1}, U_{i_2}, \cdots, U_{i_m}$, s. t. U_{i_k} 开于空间 Y_{i_k} 中 $(k=1, 2, \cdots, m)$ 并且

$$f(x)\in\prod(U_{i_1}, U_{i_2}, \cdots, U_{i_m})\subset U.$$

由此可见,

$$x\in f^{-1}[\prod(U_{i_1}, U_{i_2}, \cdots, U_{i_m})]\subset f^{-1}(U).$$

但是

$$\begin{aligned}f^{-1}&[\prod(U_{i_1}, U_{i_2}, \cdots, U_{i_m})]\\&=f^{-1}(p_{i_1}^{-1}(U_{i_1})\cap p_{i_2}^{-1}(U_{i_2})\cap\cdots\cap p_{i_m}^{-1}(U_{i_m})]\\&=f^{-1}p_{i_1}^{-1}(U_{i_1})\cap f^{-1}p_{i_2}^{-1}(U_{i_2})\cap\cdots\cap f^{-1}p_{i_m}^{-1}(U_{i_m})\\&=f_{i_1}^{-1}(U_{i_1})\cap f_{i_2}^{-1}(U_{i_2})\cap\cdots\cap f_{i_m}^{-1}(U_{i_m}).\end{aligned}$$

由于 $f_{i_k}^{-1}(U_{i_k})\quad(k=1, 2, \cdots, m)$ 是空间 X 的开集, 因而

$$f^{-1}[\prod(U_{i_1}, U_{i_2}, \cdots, U_{i_m})]$$

是空间 X 的开集. 由此可见, $f^{-1}(U)$ 是它的任意点 x 的邻域, 所以 $f^{-1}(U)$ 开于空间 X 中. 根据定理 (5.6), 函数 f 是连续的. ▌

例 32 在前一节第 4 款的开头处我们曾提到过 $\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ 的仿射变换

$$f: x=(x_1, x_2, \cdots, x_n)\to x'=(x_1', x_2', \cdots, x_n').$$

于此, $\forall\, i\in A(n)$,

$$x_i'=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}x_k\quad(|a_{ik}|\neq 0)\tag{*}$$

根据定理(6.19), 仿射变换 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ 的连续性是显而易见的. 这是因为, $\forall\, i\in A(n)$, f 的第 i 分支函数 $f_i:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 由方程(*)所决定, 而实值线性函数 f_i 的连续性是众所周知的.

令 f 为积空间 $X_1\times X_2$ 到拓扑空间 Y 内的一个函数, 并令 (x_0, y_0) 为 $X_1\times X_2$ 中的一个点. 如果函数 f 在点 (x_0, y_0) 处连

续，根据定义(5.5)，$\forall f(x_0, y_0)$的邻域V，$f^{-1}(V)$必须是点(x_0, y_0)的一个邻域．于是根据(6.11)，$\exists X_1$的开集U_1与X_2的开集U_2，s.t.

$$(x_0, y_0)\in U_1\times U_2\subset f^{-1}(V).$$

换句话说，$\exists X_1$中点x_0的一个开邻域U_1及X_2中点y_0的一个开邻域U_2，s.t. $x\in U_1\wedge y\in U_2\Rightarrow f(x, y)\in V$.

反之，如果上述条件满足，则f显然在积空间$X_1\times X_2$的一点(x_0, y_0)处连续．

以上所论明显地可以推广到任意n个空间的积空间去．因此我们得到下面的定理．

(6.20) **定理** f是积空间$\prod_{i=1}^n X_i$到空间Y内的连续函数$\Leftrightarrow\forall(x_1^0, x_2^0, \cdots, x_n^0)\in\prod_{i=1}^n X_i\wedge\forall Y$中点$f(x_1^0, x_2^0, \cdots, x_n^0)$的邻域$V$，$\exists X_i$中点$x_i^0$的开邻域$U_i$ $(i=1, 2, \cdots, n)$，s.t. $\forall x_i\in U_i$ $(i=1, 2, \cdots, n)$，总有$f(x_1, x_2, \cdots, x_n)\in V$.

定理(6.20)显然是关于多元函数连续性的柯西(Cauchy)定义的推广．关于这个事实，我们将更进一步阐明如下：

(6.21) 设$\forall k\in A(n)$，$\mathscr{T}_k$是度量空间(X_k, d_k)上度量d_k所导致的拓扑，并设f是积空间

$$(X, \mathscr{T})=\prod_{k=1}^n (X_k, \mathscr{T}_k)$$

到某一度量空间(Y, d)内的一个函数．那末，

$$\begin{aligned}f\text{连续}\Leftrightarrow\forall x_0=(x_1^0, x_2^0, \cdots, x_n^0)\in X\wedge\forall\varepsilon>0, \exists\delta>0\ni\cdot\\ x=(x_1, x_2, \cdots, x_n)\in X\wedge\forall k\in A(n), d_k(x_k, x_k^0)<\delta\\ \Rightarrow d(f(x), f(x_0))<\varepsilon.\end{aligned}$$

证 $\Rightarrow$．由定理(6.20)知道$\forall x_0=(x_1^0, x_2^0, \cdots, x_n^0)\in X\wedge\forall\varepsilon>0$，$\exists$空间$X_k$中点$x_k^0$的一个开邻域$U_k$ $(k=1, 2, \cdots, n)$，s.t. $\forall k\in A(n)\wedge x_k\in U_k$，有

$$f(x)=f(x_1, x_2, \cdots, x_n)\in B_d(f(x_0), \varepsilon).$$

其中 $B_d(f(x_0), \varepsilon)$ 表示度量空间 (Y, d) 中以点 $f(x_0)$ 为中心，ε 为半径的开球. $\forall k\in A(n)$，由于 U_k 关于拓扑 $\mathscr{T}_k$ 是开集，且 $x_k^0\in U_k$，因而 $\exists\,\delta_k>0$, s. t. $B_{d_k}(x_k^0, \delta_k)\subset U_k$，其中 $B_{d_k}(x_k^0, \delta_k)$ 表示空间 (X_k, d_k) 中的开球. 令 $\delta=\min\limits_{1\leqslant k\leqslant n}\delta_k$. 于是 $\forall k\in A(n)\wedge x\in X$

$$
\begin{aligned}
d_k(x_k, x_k^0)<\delta &\Rightarrow \forall k,\ x_k\in B_{d_k}(x_k^0, \delta_k)\\
&\Rightarrow \forall k,\ x_k\in U_k\Rightarrow f(x)\in B_d(f(x_0), \varepsilon)\\
&\Rightarrow d(f(x), f(x_0))<\varepsilon.
\end{aligned}
$$

$\Leftarrow$. $\forall x_0=(x_1^0, x_2^0, \cdots, x_n^0)\in X$ 以及 (Y, d) 中的点 $f(x_0)$ 的邻域 V，$\exists\,\varepsilon>0$, s. t. $B_d(f(x_0), \varepsilon)\subset V$. 由于条件满足，对于这个 ε，$\exists\,\delta>0$, s. t.

$$
\begin{aligned}
&x=(x_1, x_2, \cdots, x_n)\in X\wedge\forall k\in A(n),\ d_k(x_k, x_k^0)<\delta\\
&\ \Rightarrow d(f(x), f(x_0))<\varepsilon.
\end{aligned}
$$

换言之，$\forall k\in A(n)$，

$$x_k\in B_{d_k}(x_k^0, \delta)\Rightarrow f(x)\in B_d(f(x_0), \varepsilon)\Rightarrow f(x)\in V.$$

由于每个 $B_{d_k}(x_k^0, \delta)$ 是空间 $(X_k, \mathscr{T}_{d_k})$ 中点 x_k^0 的开邻域，可见定理 (6.20) 中的条件满足. 因此，函数 f 是连续的. ▌

例 33 试看 n 维欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 上的实值函数 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$. 我们已经知道 $\mathbb{R}^n$ 可以看成实直线 $\mathbb{R}$ 的 n 次积空间(参看例 30). 由于在实直线 $\mathbb{R}$ 中，

$$(x, y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}\Rightarrow d(x, y)=|x-y|,$$

因此从 (6.21) 我们立即得到下面的命题:

I. f 在 $\mathbb{R}^n$ 的一点 $x_0=(x_1^0, x_2^0, \cdots, x_n^0)$ 处连续 $\Leftrightarrow\forall\,\varepsilon>0$, $\exists\,\delta>0\ni\cdot$

$$
\begin{aligned}
&x=(x_1, x_2, \cdots, x_n)\in\mathbb{R}^n\wedge\forall k\in A(n),\ |x_k-x_k^0|<\delta\\
&\ \Rightarrow|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon.
\end{aligned}
$$

这正是柯西关于多元函数在一点处连续的定义.

设 $A\neq\emptyset$, $A\subset\mathbb{R}^n$, $x_0=(x_1^0,\ x_2^0,\ \cdots,\ x_n^0)\in A$, 并设 $f:A\to\mathbb{R}$. 如果把点集 A 看成积空间 $\mathbb{R}^n$ 的子空间,那末,我们立即看出:

II. f 在 A 的一点 x_0 处连续 $\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0\exists\delta>0\ni\cdot$

$$x=(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)\in A\wedge\forall k\in A(n),\ |x_k-x_k^0|<\delta$$
$$\Rightarrow|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon.$$

特别地,当 $n=1$, $A=[a,\ b]\,(a<b)$ 时,命题 II 变成:

f 在区间 $A=[a,\ b]$ 上一点 x_0 处连续 $\Leftrightarrow$

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0\ni\cdot x\in A\wedge|x-x_0|<\delta$$
$$\Rightarrow|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon.$$

这在《数学分析》中是为人们所熟知的函数在一点处连续的定义,其中的条件称为关于函数连续性的柯西条件.

由(6.9)看出,如果 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, $A\subset\mathbb{R}^n$, $A\neq\emptyset$. 那末 f 在 $\mathbb{R}^n$ 上连续 $\Rightarrow f|A$ 在 A 上连续.

所谓的"在 A 上连续",意即在 A 的每个点处都连续.

利用(6.21),我们去证明下面的命题:

(6.22) 每个度量空间 $(X,\ d)$ 上的度量 d 都是积空间 X^2 上的连续实值函数.

证 令 (x_0, y_0) 为空间 X^2 中随意给定的一个点,并令 $(x, y)\in X^2$. 显而易见:

$$d(x,\ y)-d(x,\ y_0)\leqslant d(y_0,\ y),$$

又
$$d(x,\ y_0)-d(y,\ y_0)\leqslant d(x,\ y)$$

或者
$$d(x,\ y)-d(x,\ y_0)\geqslant-d(y_0,\ y),$$

所以
$$|d(x,\ y)-d(x,\ y_0)|\leqslant d(y_0,\ y).$$

同理
$$|d(x,\ y_0)-d(x_0,\ y_0)|\leqslant d(x_0,\ x).$$

由此推出,

$$|d(x,y)-d(x_0,y_0)|\leqslant|d(x,y)-d(x,y_0)|$$
$$+|d(x,y_0)-d(x_0,y_0)|\leqslant d(x_0,x)+d(y_0,y).$$

因此，$\forall \varepsilon>0$，可取 $\delta=\frac{\varepsilon}{2}$. 于是当 $d(x_0, x)<\delta$, $d(y_0, y)<\delta$ 时必定有

$$|d(x, y)-d(x_0, y_0)|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

所以 d 在空间 X^2 的任一点 (x_0, y_0) 处都连续，从而在 X^2 上连续. ▌

5° 商空间 下面所讲的，仍然是由已知拓扑空间构造新拓扑空间的方法，不过这一回是在利用等价关系给空间以分类而得到的商集上定义适当的拓扑.

(6.23) **定义** 设$(X, \mathscr{T})$为任一给定的拓扑空间，R 为 X 上的一个等价关系，并设 q 为 X 到商集 X/R 上的自然映射(即商映射). 商集 X/R 上使 q 连续的最大拓扑，也就是商拓扑 $\mathscr{T}/q$，今后将记作 $\mathscr{T}/R$. 我们称拓扑空间$(X/R, \mathscr{T}/R)$为关于空间$(X, \mathscr{T})$与等价关系 R 的**商空间**.

商拓扑 $\mathscr{T}/R$ 也叫做**叠合拓扑**；商空间$(X/R, \mathscr{T}/R)$ 可以简记作 X/R. 从定理(6.3)的证明可以看出，商拓扑

$$\mathscr{T}/R=\{U\in\mathscr{P}(X/R)\,|\,q^{-1}(U)\in\mathscr{T}\}.$$

商空间 X/R 也叫做由**拓扑叠合法**而得到的空间，因为它可以看成是在空间 X 中把在等价关系 R 下等价的点重合为一个点而得到.

例 34 令

$$X=\{(x, y)\in\mathbb{R}^2\,|\,x^2+y^2\leqslant 1\},$$

即 X 为一(二维)**圆盘面**(简称**盘面**). 把 X 看成平面 $\mathbb{R}^2$ 的子空间，并于其上定义一个关系 R 如下：令

$$z=(x, y)\text{与 } z'=(x', y')$$

为 X 中任意一对点，并令 $zRz'\Leftrightarrow z=z'\vee z$ 与 z' 为同一直径的两个端点，即

$$x^2+y^2=1,\ (x', y')=(-x, -y).$$

不难看出，R 是 X 上的一个等价关系. $\forall z\in X$，当 z 为 X 的内点时，则包含 z 的等价类 $\bar{z}=\{z\}$，否则 $\bar{z}=\{z, z'\}$，而 z 与 z' 为 X 的对径点. 这样，商空间 X/R 显然与射影平面同胚；实际上，它是射影平面的一个模型，所以我们也把它叫做一个射影平面，它是用拓扑叠合法，通过叠合盘面 X 的对径点而得到的.

如果我们把 $\mathbf{R}^3$ 中的球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 的对径点用拓扑叠合法叠合起来，我们又得到一个射影平面的模型。

例 35 设 M 是拓扑空间 X 的一个非空点集，并设 x 与 y 为空间 X 的任意一对点。令关系 R 的定义如下：

$$xRy \leftrightarrow (x=y) \vee (x \neq y \wedge (x,\ y) \in M \times M).$$

这样一来，R 显然是 X 上的一个等价关系，而且当 $x \notin M$ 时，包含 x 的等价类 $\bar{x}=\{x\}$，否则 $\bar{x}=M$。因此在商空间 X/R 中集合 M 被看成一点。换句话说，如果在空间 X 中把 M 的各点"重合"(叠合)起来成为一个点，其他各点不动(即把单点集 $\{x\}$ 看成点 x)，那末，所得就是空间 X/R。

(6.24) **定义** 如果 f 是拓扑空间$(X,\ \mathscr{T})$到拓扑空间$(Y,\ \mathscr{T}/f)$上的一个满函数，那末，f 就叫做一个**叠合函数**。空间$(Y,\ \mathscr{T}/f)$叫做关于拓扑 $\mathscr{T}$ 及函数 f 的**叠合空间**，又商拓扑 $\mathscr{T}/f$ 也可以叫做关于拓扑 $\mathscr{T}$ 及函数 f 的**叠合拓扑**。

我们知道，对于每个函数 $f: X \to Y$，在 X 上总有一个由 f 导出的等价关系 R。而由 X 上的一个已知拓扑 $\mathscr{T}$ 及关系 R，我们就得到一个商空间$(X/R,\ \mathscr{T}/R)$。我们现在要去研究，在 f 为满函数的条件下，这个商空间与叠合空间$(Y,\ \mathscr{T}/f)$之间的关系。

(6.25) **定理** 如果 f 是拓扑空间$(X,\ \mathscr{T})$到拓扑空间$(Y,\ \mathscr{U})$上的一个连续的开或闭的满函数，则 f 是一个叠合函数，换句话说，$\mathscr{U}=\mathscr{T}/f$。

证 如果 f 是一个开函数，并且 $U \subset Y$，s. t. $f^{-1}(U)$开于空间 X 中，则 $U=f[f^{-1}(U)]$是空间 Y 的开集。于是

$$U \in \mathscr{T}/f \Rightarrow U \in \mathscr{U}.$$

因此，$\mathscr{T}/f \subset \mathscr{U}$。但是 f 是连续的，而 $\mathscr{T}/f$ 是 Y 上能使 f 连续的最大拓扑，所以我们又有 $\mathscr{U} \subset \mathscr{T}/f$。由此可见，$\mathscr{U}=\mathscr{T}/f$，从而根据定义(6.24)知道 f 是一个叠合函数。

当 f 是闭函数时，定理不难仿上得到证明。】

这个定理告诉了我们，开的或闭的连续满函数以及它的定义域的拓扑完全决定了值域的拓扑。由此可见，积空间$(X,\ \mathscr{T})=\prod_\alpha(X_\alpha,\ \mathscr{T}_\alpha)$的每个坐标映射 p_α 都是积空间 X 到坐标空间 X_α 上的叠合函数。这是因为，p_α 是开的连续满函数。我们知道，积拓扑 $\mathscr{T}$ 是使所有坐标映射 p_α 连续的最小拓扑；可是坐标空间的拓扑 $\mathscr{T}_\alpha$ 则是使 p_α 连续的 X_α 上的最大拓扑。

(6.26) **定理** 设 f 是空间 X 到空间 Y 上的一个叠合函数，又 g 是 Y

到空间 Z 内的一个函数. 那末, g 连续 $\Leftrightarrow gf$ 连续.

证 设 U 开于空间 Z 中, 并设合成函数 gf 连续. 那末, $(gf)^{-1}(U)=f^{-1}[g^{-1}(U)]$ 开于空间 X 中. 由于 Y 具有叠合拓扑, 可见 $g^{-1}(U)$ 是空间 Y 的开集. 既然 g 反射开集, 那末, g 就必然连续. 反过来这一层是完全明显的. ▌

(6.27) **定理** 设 f 是拓扑空间 $(X, \mathscr{T})$ 到集合 Y 上的一个满函数, 并设 R 是由函数 f 在 X 上所导出的等价关系. 那末, 商空间 $(X/R, \mathscr{T}/R)$ 必然与叠合空间 $(Y, \mathscr{T}/f)$ 同胚:

$$(X/R, \mathscr{T}/R)\approx(Y, \mathscr{T}/f).$$

证 因为 X 上的等价关系 R 是由 f 导出的, 所以

$$X/R=\{\bar{x}\in\mathscr{P}(X)\,|\,x\in X,\ \ \bar{x}=f^{-1}[f(x)]\}.$$

$\forall y\in Y$, 令 $g(y)=f^{-1}(y)$. 那末, g 显然是 Y 到 X/R 上的一个双一一函数, 从而 g 有一个反函数 $g^{-1}: X/R\to Y$. 设 q 是 X 到 X/R 上的商映射; 于是 $\forall x\in X$, $q(x)=\bar{x}=f^{-1}[f(x)]$. 可见

$$gf=q,\quad f=g^{-1}q.$$

根据(6.26), 因为 f 是叠合函数, $f:(X, \mathscr{T})\to(Y, \mathscr{T}/f)$, 并且 $gf=q$ 是空间 $(X, \mathscr{T})$ 到商空间 $(X/R, \mathscr{T}/R)$ 上的连续函数, 所以 g 是空间 $(Y, \mathscr{T}/f)$ 到空间 $(X/R, \mathscr{T}/R)$ 上的连续函数. 同理, 因为商映射 q 是 $(X, \mathscr{T})$ 到 $(X/R, \mathscr{T}/R)$ 上的叠合函数, f 连续, 且 $f=g^{-1}q$, 所以 g^{-1} 也连续. 由此可见, g 是空间 $(Y, \mathscr{T}/f)$ 到空间 $(X/R, \mathscr{T}/R)$ 上的一个同胚. ▌

任意给定一个拓扑空间 $(X, \mathscr{T})$. 定理(6.27)是从任意事先给出的一个集合 Y 和一个满函数 $f: X\to Y$ 出发, 然后由 f 导出 X 上的一个等价关系 R, 从而构造了两个叠合空间 $(X/R, \mathscr{T}/R)$ 与 $(Y, \mathscr{T}/f)$. 最后判明:

$$(X/R, \mathscr{T}/R)\approx(Y, \mathscr{T}/f).$$

当然也可以把上述构造程序颠倒过来: 事先在 X 上任意给出一个等价关系 R, 并随意构造一个与商集 X/R 等势的集合 Y, 并设 g 是 X/R 到 Y 上的一个双一一函数, q 是 X 到商集 X/R 的自然映射. 现在定义 X 到 Y 上的一个满函数 f 如下: $f=gq$. 这样一来, 函数 f 在 X 上所导出的等价关系显然就是已知的等价关系 R. 于是引用定理(6.27), 仍然得到

$$(X/R, \mathscr{T}/R)\approx(Y, \mathscr{T}/f).$$

因此我们得到下面的

(6.28) **系** 设 R 是拓扑空间 $(X, \mathscr{T})$ 上的一个等价关系, 并设 Y 是与

商集 X/R 等势的任一集合. 那末,存在着 X 到 Y 上的一个满函数 f, 使得

$$(X/R, \mathscr{T}/R) \approx (Y, \mathscr{T}/f).$$

七、等价度量·度量积

我们现在回到度量空间, 去讨论在同一个集合上的两个不同的度量,它们在什么条件下导致在这个集合上为同一拓扑,并讨论度量空间的积空间的度量化问题.

1. 等价度量 在同一个集合上可以定义若干个不同的度量, 例如在例 1 至例 4 中, 在同一个实数系 $\mathbb{R}$ 上我们就定义了四个不同的度量, 从而构造了四个不同的度量空间. 但它们所导致的拓扑是否也彼此不同呢? 如果在同一集合上的两个不同的度量导致同一拓扑,那末,这两个具有这些不同度量的度量空间将转化成同一个扑拓空间. 这种情况在很多数学问题上都有必要加以考虑. 下面我们就来对此进行探讨.

(7.1) **定义** 设 d 与 d' 是同一个集合 X 上的两个度量. 如果 d 与 d' 导致 X 上的同一拓扑, 那末, d 与 d' 就叫做**等价度量**.

我们去证明下面的

(7.2) **定理** 设 d 与 d' 是集合 X 上的两个度量. 度量 d 与 d' 等价 $\Leftrightarrow$

1° $\forall x \in X \wedge \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \ni \cdot y \in X \wedge d'(x, y) < \delta$
$$\Rightarrow d(x, y) < \varepsilon;$$

2° $\forall x \in X \wedge \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \ni \cdot y \in X \wedge d(x, y) < \delta$
$$\Rightarrow d'(x, y) < \varepsilon.$$

证 $\Rightarrow$. $\forall x \in X \wedge \forall \varepsilon > 0$, 令 $B_d(x, \varepsilon)$ 表示关于度量 d 的开球,并令 $\mathscr{T}_d$ 与 $\mathscr{T}_{d'}$ 分别表示由度量 d 及 d' 所导致的 X 上的拓

扑. 如果 d 与 d' 等价, 则 $\mathscr{T}_d=\mathscr{T}_{d'}$; 从而 $B_d(x, \varepsilon)$ 不但关于拓扑 $\mathscr{T}_d$ 而且关于拓扑 $\mathscr{T}_{d'}$ 也是开的. 如此, 由于 $x\in B_d(x, \varepsilon)$, 因而必有 $\delta>0$, s.t. $B_{d'}(x, \delta)\subset B_d(x, \varepsilon)$, 于此, $B_{d'}(x, \delta)$ 是关于度量 d' 的开球. 所以

$$y\in X\wedge d'(x, y)<\delta\Rightarrow y\in B_{d'}(x, \delta)$$
$$\Rightarrow y\in B_d(x, \varepsilon)\Rightarrow d(x, y)<\varepsilon.$$

这证明了条件 1° 是必要的. 同理可证, 条件 2° 也是必要的.

$\Leftarrow$. 设条件 1° 与 2° 都满足. 任取一个 $U\in\mathscr{T}_d$; 那末,

$$x\in U\Rightarrow\exists\,\varepsilon>0\ni\cdot B_d(x, \varepsilon)\subset U.$$

因为条件 1° 满足, 所以

$$\exists\,\delta>0\ni\cdot y\in X\wedge d'(x, y)<\delta\Rightarrow d(x, y)<\varepsilon.$$

由此可见, $$B_{d'}(x, \delta)\subset B_d(x, \varepsilon)\subset U.$$

因此 $U\in\mathscr{T}_{d'}$. 故 $\mathscr{T}_d\subset\mathscr{T}_{d'}$. 由于 d 与 d' 在 1° 与 2° 中所起作用是对等的, 可知 $\mathscr{T}_{d'}\subset\mathscr{T}_d$. 所以我们有 $\mathscr{T}_d=\mathscr{T}_{d'}$. 这就证明了 d 与 d' 等价. ▌

(7.3) **系** 如果存在正数 m 与 m' 使得 $\forall(x, y)\in X^2$,

$$md(x, y)\leqslant d'(x, y)\leqslant m'd(x, y),$$

则度量 d 与 d' 等价.

证 $\forall\,\varepsilon>0$, 如果取 $\delta=m\varepsilon$, 那末,

$$d'(x, y)<m\varepsilon\Rightarrow md(x, y)<m\varepsilon\Rightarrow d(x, y)<\varepsilon.$$

又 $\forall\,\varepsilon>0$, 如果取 $\delta=\varepsilon/m'$, 那末,

$$d(x, y)<\varepsilon/m'\Rightarrow m'd(x, y)<\varepsilon\Rightarrow d'(x, y)<\varepsilon.$$

这样一来, 定理(7.2)中的条件 1° 与 2° 都适合, 所以度量 d 与 d' 等价. ▌

例 36 对于任一自然数 $n>1$, 取 n 维欧氏度量 d 及例 3 中的 d_1 来讨论. 因为 $\forall(x, y)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$,

$$d_1(x, y)\leqslant d(x, y)\leqslant\sqrt{n}\,d_1(x, y).$$

所以根据系(7.3)，d 与 d_1 等价. 再取例 4 中的 d_2 来看它是否与 d_1 等价. 显而易见,

$$d_1(x, y) \leqslant d_2(x, y) \leqslant n d_1(x, y),$$

因此, d_1 与 d_2 也等价. 所以 d、d_1、d_2 两两等价. 很明显, 例 2 中的 d_0 不与以上三个度量中的任何一个等价, 因为离散空间 $(\mathbb{R}^n, d_0)$ 的任何点集都是开集, 但是 n 维欧氏空间 $(\mathbb{R}^n, d)$ 却有无穷多个点集不是开集, 例如 $(\mathbb{R}^n, d)$ 中的所有非空有限点集都闭而不开, $\mathbb{Q}^n$ 与 $\mathbb{I}^n$ 等等则不开不闭.

2. 度量积 在例 30 中我们已经提到实直线 $\mathbb{R}$ 的二次积空间 $\mathbb{R}^2$ 可以用二维欧氏度量来度量化. 例 36 表明, 实直线 $\mathbb{R}$ 的任何 n 次积空间 $\mathbb{R}^n$ 都可以用 n 维欧氏度量 d 来度量化. 这是因为, 关于度量 d_1 的任何开球是一个 n 维开立方体, 即 I^n, 于此 $I =]a, b[\ (a<b)$. 根据(6.15), 所有的 n 维线段构成 $\mathbb{R}^n$ 上积拓扑的一个基, 所以关于度量 d_1 的所有 n 维开球也构成这个积拓扑的一个基. 事实上, 任何 n 维线段必然是一些这种开球的并集. 由于 n 维欧氏度量 d 与 d_1 等价, 因此拓扑积 $\mathbb{R}^n$ 也可以用 d 度量化.

把上面的事实推广到一般, 我们给出下面的

(7.4) **定义** 设任意给出了度量空间的一个有限或无穷族 $\{(X_i, d_i)\}_{i\in I}$, 并设 $\forall i \in I$, $\mathscr{T}_i$ 是度量 d_i 所导致的 X_i 上的拓扑. 作出积空间

$$(X, \mathscr{T}) = \prod_{i\in I}(X_i, \mathscr{T}_i).$$

如果积空间 $(X, \mathscr{T})$ 可以用 X 上的一个度量 d 度量化, 那末, 度量空间 (X, d) 就叫做这一族度量空间 $\{(X_i, d_i)\}_{i\in I}$ 的**度量积**, 并且记作

$$(X, d) \cong \prod_{i\in I}(X_i, d_i).$$

下面, 我们按度量空间族 $\{(X_i, d_i)\}_{i\in I}$ 为有限或无穷两种情

形来讨论.

1°　有限的情形　设(X_1, d_1), (X_2, d_2), …, (X_n, d_n)是度量空间的一个有限序列. 令

$$x=(x_1, x_2, \cdots, x_n), \quad y=(y_1, y_2, \cdots, y_n)$$

是笛卡尔积$X=\prod_{i=1}^n X_i$中随意的一对元素. 定义X^2上的一个实值函数d如下:

$$d(x, y)=\max[d_1(x_1, y_1), d_2(x_2, y_2), \cdots, d_n(x_n, y_n)] \quad (\mathrm{I})$$

象例8那样, 我们容易证明d是X上的一个度量, 于是得到一个度量空间(X, d). 关于这个度量d我们有下面的

(7.5)　**引理**　设ε为任一给定的正数. 如果以$B_i(x_i, \varepsilon)$表示度量空间(X_i, d_i) $(i=1, 2, \cdots, n)$中以它的一个点x_i为中心、以ε为半径的开球, 并以$B(x, \varepsilon)$表以在度量空间(X, d)中以它的点$x=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$为中心、以$\varepsilon$为半径的开球, 则

$$B(x, \varepsilon)=B_1(x_1, \varepsilon)\times B_2(x_2, \varepsilon)\times\cdots\times B_n(x_n, \varepsilon).$$

证　假定$x'=(x'_1, x'_2, \cdots, x'_n)$是积$\prod_{i=1}^n B_i(x_i, \varepsilon)$的任意点; 则

$$d_i(x_i, x'_i)<\varepsilon \quad (i=1, 2, \cdots, n),$$

因此　$\max\limits_{1\le i\le n} d_i(x_i, x'_i)<\varepsilon$, 即$d(x, x')<\varepsilon$,

所以$x'\in B(x, \varepsilon)$. 这证明了

$$\prod_{i=1}^n B_i(x_i, \varepsilon)\subset B(x, \varepsilon).$$

同理易证:　$B(x, \varepsilon)\subset\prod_{i=1}^n B_i(x_i, \varepsilon)$.

因此我们有　$B(x, \varepsilon)=\prod_{i=1}^n B_i(x_i, \varepsilon)$. ▌

(7.6)　**定理**　设$\forall i\in A(n)$, X_i上的度量d_i所导致的拓扑为$\mathscr{T}_i$, 并设$(X, \mathscr{T})=\prod_{i=1}^n (X_i, \mathscr{T}_i)$. 如果以(I)中的$d$为笛卡尔积$X=\prod_{i=1}^n X_i$上的度量, 则度量空间$(X, d)$为$n$个度量空间

$$(X_1, d_1), (X_2, d_2), \cdots, (X_n, d_n)$$

的度量积; 换言之, d在X上所导致的拓扑$\mathscr{T}_d$与积拓扑相同;

$\mathscr{T}=\mathscr{T}_d$.

证 任取一个 $U\in\mathscr{T}_d$, 并且任取一个点 $x\in U$. 于是必然 $\exists\, \varepsilon>0$ s. t. $B(x,\ \varepsilon)\subset U$. 但是由引理(7.5),

$$B(x,\ \varepsilon)=\prod_{i=1}^{n} B_i(x_i,\ \varepsilon),$$

所以
$$x\in\prod_{i=1}^{n} B_i(x_i,\ \varepsilon)\subset U.$$

于此, $\forall\, i\in A(n)$, $B_i(x_i,\ \varepsilon)\in\mathscr{T}_i$. 这证明了 $U\in\mathscr{T}$, 从而 $\mathscr{T}_d\subset\mathscr{T}$.

反之, 设 $U\in\mathscr{T}$, 并设 $x\in U$. 于是 $\forall\, i\in A(n)$, $\exists\, V_i\in\mathscr{T}_i$, s. t.

$$x\in V_1\times V_2\times\cdots\times V_n\subset U.$$

由于 $V_i\in\mathscr{T}_i$, 因而 $\forall\, i\in A(n)$, $\exists\, \varepsilon_i>0$, s. t. $B_i(x_i,\ \varepsilon_i)\subset V_i$. 令

$$\varepsilon=\min(\varepsilon_1,\ \varepsilon_2,\ \cdots,\ \varepsilon_n);$$

则
$$\prod_{i=1}^{n} B_i(x_i,\ \varepsilon)\subset\prod_{i=1}^{n} B_i(x_i,\ \varepsilon_i)\subset\prod_{i=1}^{n} V_i\subset U.$$

但是根据引理(7.5), $B(x,\ \varepsilon)=\prod_{i=1}^{n} B_i(x_i,\ \varepsilon)$. 所以 $B(x,\ \varepsilon)\subset U$. 这样一来, $U\in\mathscr{T}_d$, 从而 $\mathscr{T}\subset\mathscr{T}_d$. 因此, $\mathscr{T}=\mathscr{T}_d$. ▌

假定 X^n 上的一个实值函数 d' 定义如下:

$$d'(x,\ y)=d_1(x_1,\ y_1)+d_2(x_2,\ y_2)+\cdots+d_n(x_n,\ y_n) \qquad \text{(II)}$$

那末, d' 显然是笛卡尔积 $X=\prod_i X_i$ 上的一个度量, 并且显然有

$$d(x,\ y)\leqslant d'(x,\ y)\leqslant n d(x,\ y),$$

其中 d 是用公式(I)所确定的 X 上的度量. 因此, 从系(7.3)推出度量 d 与 d' 等价. 这样一来, 我们就证明了下面的

(7.7) **系** 如果以(II)中的 d' 为积 $X=\prod_{i=1}^{n} X_i$ 上的度量, 那末,

$$(X,\ d')\cong\prod_{i=1}^{n}(X_i,\ d_i).$$

再设

$$d''(x,\ y)=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}[d_i(x_i,y_i)]^2}, \qquad \text{(III)}$$

那末, 易知 d'' 也是 $X=\prod_i X_i$ 上的一个度量, 并且由于

$$d(x, y) \leqslant d''(x, y) \leqslant \sqrt{n}\, d(x, y),$$

可见 d 与 d'' 等价．因此：

(7.8) **系** $(X, d'') \cong \prod_{i=1}^{n} (X_i, d_i)$.

2° 无穷的情形 设$\{(X_n, d_n)\}$是一个度量空间的无穷序列．作积 $X = \prod_{n=1}^{\infty} X_n$．假定

$$x = \{x_n\}, \quad y = \{y_n\}$$

是 X 中的一对随意元素，并且假定 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 是一个收敛的严格正项级数．令

$$d(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{d_n(x_n, y_n)}{1+d_n(x_n, y_n)} \tag{IV}$$

则不难证明 d 是 X 上的一个度量．我们去证明：

(7.9) **定理** 如果以(IV)中的 d 为 X 上的度量，则

$$(X, d) \cong \prod_{n=1}^{\infty} (X_n, d_n).$$

证* $\forall n \in \mathbb{N}$，设 $\mathscr{T}_d$ 及 $\mathscr{T}_n$ 分别是(IV)中的 d 及 d_n 所导致的拓扑，又 $\mathscr{T}$ 是 X 上关于所有的 $\mathscr{T}_n$ 的积拓扑．令 $U \in \mathscr{T}$，并令 $x \in U$．那末，

$$\exists n_i \in \mathbb{N} \wedge \exists V_{n_i} \in \mathscr{T}_{n_i} \quad (i=1, 2, \cdots, k), \text{ s.t.}$$

$$x \in \prod(V_{n_1}, V_{n_2}, \cdots, V_{n_k}) \subset U.$$

由于 $V_{n_i} \in \mathscr{T}_{n_i}$，因而 $\exists$ 实数 $r_{n_i} > 0 \quad (i=1, 2, \cdots, k)$, s.t.

$$B_{n_i}(x_{n_i}, r_{n_i}) \subset V_{n_i}, \quad (i=1, 2, \cdots, k)$$

其中 x_{n_i} 是点 x 的第 n_i 坐标，又 $B_{n_i}(x_{n_i}, r_{n_i})$ 是度量空间(X_{n_i}, d_{n_i})中以点 x_{n_i} 为中心、r_{n_i} 为半径的球形邻域．令

$$r = \min(r_{n_1}, r_{n_2}, \cdots, r_{n_k}), \quad a = \min(a_{n_1}, a_{n_2}, \cdots, a_{n_k}),$$

并令

$$\varepsilon = \frac{ar}{1+r},$$

则度量空间 (X, d) 中的球形邻域 $B(x, \varepsilon) \subset U$．实际上，如果 $x' = \{x'_n\}$是 $B(x, \varepsilon)$中的任一点，则必有 $d(x, x') < \varepsilon$，于是 $\forall i \in \Delta(k)$，

$$a_{n_i} \frac{d_{n_i}(x_{n_i}, x'_{n_i})}{1+d_{n_i}(x_{n_i}, x'_{n_i})} < \frac{ar}{1+r},$$

所以

$$\frac{d_{n_i}(x_{n_i}, x'_{n_i})}{1+d_{n_i}(x_{n_i}, x'_{n_i})} < \frac{r}{1+r}.$$

由此立即推出

$$d_{n_i}(x_{n_i}, x'_{n_i}) < r.$$

于是 $$x'_{n_i} \in B_{n_i}(x_{n_i}, r) \subset B_{n_i}(x_{n_i}, r_{n_i}) \subset V_{n_i},$$

因此, $$x' \in \prod(V_{n_1}, V_{n_2}, \cdots, V_{n_k}) \subset U.$$

这证明了 $$B(x, s) \subset U.$$

由此可见, $U \in \mathscr{T}_d$. 所以我们有 $\mathscr{T} \subset \mathscr{T}_d$.

反之, 设 $U \in \mathscr{T}_d$, 并设 $x \in U$. 那末, $\exists s>0$, s.t. $B(x, s) \subset U$. 任意取一个数 $\eta>0$, s. t. 不等式

$$0 < s-\eta < 1$$

成立, 并且令 $s=\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. 那末, $\exists n \in \mathbb{N}$, s. t.

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} a_{n+\nu} \frac{d_{n+\nu}(x_{n+\nu}, y_{n+\nu})}{1+d_{n+\nu}(x_{n+\nu}, y_{n+\nu})} < \eta,$$

其中 $y=\{y_n\}$ 是空间 (X, d) 中的任一点; 又当 n 充分大时, 显然还能使 $ns > s-\eta$. 令

$$r = \frac{s-\eta}{ns-s+\eta},$$

则 r 为一正数. 容易看出:

$$\prod[B_1(x_1, r), B_2(x_2, r), \cdots, B_n(x_n, r)] \subset U. \tag{9}$$

事实上, 令

$$y \in \prod[B_1(x_1, r), B_2(x_2, r), \cdots, B_n(x_n, r)];$$

则有 $$d_i(x_i, y_i) < \frac{s-\eta}{ns-s+\eta}, \quad (i=1, 2, \cdots, n)$$

于是 $$a_i \frac{d_i(x_i, y_i)}{1+d_i(x_i, y_i)} < \frac{s-\eta}{n}, \quad (i=1, 2, \cdots, n)$$

所以我们有 $$\sum_{i=1}^{n} a_i \frac{d_i(x_i, y_i)}{1+d_i(x_i, y_i)} < s-\eta.$$

由此推出, $$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{d_n(x_n, y_n)}{1+d_n(x_n, y_n)} < s,$$

也就是: $$d(x, y) < s.$$

所以 $$y \in B(x, s) \subset U.$$

这就证明了(9)式成立. 由此可见 [x 显然属于(9)式的左边], $U \in \mathscr{T}$. 因此, $\mathscr{T}_d \subset \mathscr{T}$.

于是由 $\mathscr{T} \subset \mathscr{T}_d$ 及 $\mathscr{T}_d \subset \mathscr{T}$ 立即推出 $\mathscr{T} = \mathscr{T}_d$.

可见 $$(X, d) \cong \prod_{n=1}^{\infty}(X_n, d_n). \ \blacksquare$$

例 37 设 $x=\{x_n\}$, $y=\{y_n\}$ 是积空间 $\mathbb{R}^\infty$ 的任意一对点. 令

$$d(x, y)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\frac{|x_n-y_n|}{1+|x_n-y_n|}, \tag{10}$$

根据定理(7.9), 度量空间$(\mathbb{R}^\infty, d)$是无穷可数多个实直线 $\mathbb{R}$ 的度量积. (10)中所定义的度量 d 叫做弗莱歇(Fréchet)度量, 度量空间$(\mathbb{R}^\infty, d)$叫做弗莱歇度量空间, 通常用记号 E_ω 来表示:

$$E_\omega=(\mathbb{R}^\infty, d).$$

又(IV)中的度量 d 显然是弗莱歇度量的推广, 所以也可以称为**弗莱歇度量**.

八、实 直 线[①]

本节将利用前面的已知事实来进一步阐明实直线(即一维欧氏空间)的开集的结构, 并论述康托尔集(Cantor set)的一些重要性质.

1. 实直线 $\mathbb{R}$ 的开集的结构 我们已经知道, 实直线 $\mathbb{R}$ 的拓扑, 即实数系 $\mathbb{R}$ 上的自然拓扑或寻常拓扑, 是以所有非退化的有限开区间所组成的集合为它的一个基的. 因此实直线 $\mathbb{R}$ 的每个开集都可以表示成一族有限开区间的并集. 我们在下面要去证明的是, 如果去掉开区间为有限这一限制, 形成这个并集的开区间可以两两不相交. 众所周知, 这个事实在勒贝格的测度理论中是很重要的. 在证明这一事实之前, 为了今后引用时方便起见, 我们先给出下面的

① 本节内容大体上取自 C. Chevalley 教授在 1945 年为普林斯顿(Princeton)大学本科生及研究生合开的《一般拓扑学》一课的一份未发表、并为本书前一作者所记的课堂笔记中, 但有若干增补. 最后的评论则为本书前一作者所作.

(8.1) **定义** 设$\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$是任意的一个集合族. 如果

$$(\alpha, \alpha')\in I^2\wedge\alpha\neq\alpha'\Rightarrow A_\alpha\cap A_{\alpha'}=\emptyset,$$

则集合族$\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$叫做分离的. 如果集合族$\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$是分离的, 那末并集$\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha$叫做这一族集合的分离并, 记作$\coprod_{\alpha\in I}A_\alpha$.

(8.2) **定理** 实直线$\mathbb{R}$的每个开集都是一族开区间的分离并.

证 设U是$\mathbb{R}$的任一开集. 如果$U=\emptyset$, 则已无可证. 设$U\neq\emptyset$, 并令

$$R=\{(x, y)\in U^2\mid[x, y]\subset U\vee[y, x]\subset U\}.$$

显而易见, R是U上的一个等价关系. 于是根据定理(0.6.3), 关系R决定了开集U的一个分类$\{J_\iota\}_{\iota\in I}$, 又从分类的定义(0.6.2)看出, $U=\coprod_{\iota\in I}J_\iota$, 因此只须证明, $\forall\iota\in I$, 等价类J_ι是一个开区间就成了.

对于任意的一个等价类J_ι, 显然只有下面四种情形之一可能发生:

1° J_ι既有上界也有下界;

2° J_ι没有上界, 但是有一个下界;

3° J_ι有一个上界, 但是没有下界;

4° J_ι既没有上界, 也没有下界.

假定情形1°发生. 令

$$a=\inf J_\iota,\quad b=\sup J_\iota.$$

我们去证明$J_\iota=\,]a, b[$.

事实上,

$$x\in J_\iota\Rightarrow a\leqslant x\leqslant b.$$

但是,

$$x\neq a\wedge x\neq b.$$

为了证明$x\neq a$, 假定恰恰相反, $x=a$. 于是, 在$x\in J_\iota$的假设下, 必有$a\in U$. 因为U是实直线$\mathbb{R}$的开集, 所以必有有限开区

间 $]\alpha, \beta[$, s. t.

$$a\in\ ]\alpha, \beta[\ \subset U.$$

任取一个实数 r, s. t. $\alpha<r<a$; 于是

$$[r, a]\subset\ ]\alpha, \beta[\ \subset U.$$

由此可见, aRr 成立. 由于 $a=x\in J_i$, 因此 $r\in J_i$. 但这与 $a=\inf J_i$ 这一事实矛盾. 所以我们必须有 $x\neq a$. 同理可证, $x\neq b$. 由此可知

$$J_i\subset\ ]a, b[\ .$$

现在假定 c 是 $]a, b[$ 中的任一点. 我们去证明 $c\in J_i$. 既然 $a=\inf J_i$, 又 $a<c$, 那末, 必定有一个实数 $x\in J_i$, s. t. $a<x<c$. 又既然 $b=\sup J_i$, 又 $c<b$, 那末, 必定有一个实数 $y\in J_i$, s. t. $c<y<b$. 因为

$$x\in J_i\wedge y\in J_i,$$

所以 xRy 成立. 换言之, $[x, y]\subset U$. 于是 $[x, c]\subset U$ 由此可见, xRc 成立. 因此, $c\in J_i$. 所以我们又有

$$]a, b[\ \subset J_i.$$

综上所述, 我们有 $J_i=\ ]a, b[$.

如果情形 2° 发生, 则可令 $a=\inf J_i$. 于是仿照前面可以证明 $J_i=\ ]a, +\infty[$.

如果情形 3° 发生, 则可令 $b=\sup J_i$. 于是不难证明 $J_i=\ ]-\infty, b[$.

最后, 当情形 4° 发生时, 我们显然有 $J_i=\ ]-\infty, +\infty[$.

可见无论在任何情形下, J_i 总是一个开区间. ▮

如果实直线 ℝ 的一个点集 U 可以用一族开区间的分离并来表示, 那末, U 显然是 ℝ 的一个开集. 因此, 结合定理(8.2), 我们得到:

(8.3) U 是实直线 ℝ 的一个开集 ⇔ U 可以表示成一族开区

间的分离并.

2. 康托尔集 现在让我们来构造所谓的康托尔集:

第一步, 以 $\frac{1}{3}$ 与 $\frac{2}{3}$ 两点把单位闭区间[0, 1]分成三个等份, 并且去掉中间的开区间 $\left]\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right[$,于是剩下来的是两个闭区间 $\left[0, \frac{1}{3}\right]$ 与 $\left[\frac{2}{3}, 1\right]$ 的分离并, 记作 E_1:

$$E_1=\left[0, \frac{1}{3}\right]\amalg\left[\frac{2}{3}, 1\right].$$

设对于任意的自然数 k, 在第 k 步我们已经构作了 $\mathbb{R}$ 的点集 E_k, 它是 2^k 个等长$\left(长度为 \frac{1}{3^k}\right)$的闭区间 $I_1^{(k)}, I_2^{(k)}, \cdots, I_{2^k}^{(k)}$ 的分离并:

$$E_k=\amalg_{i=1}^{2^k} I_i^{(k)},$$

其中 $\quad I_1^{(k)}=\left[0, \frac{1}{3^k}\right], I_2^{(k)}=\left[\frac{2}{3^k}, \frac{3}{3^k}\right], I_3^{(k)}=\left[\frac{6}{3^k}, \frac{7}{3^k}\right],$

$\cdots, \quad I_{2^k}^{(k)}=\left[\frac{3^k-1}{3^k}, 1\right].$

在第 $k+1$ 步, $\forall i\in A(2^k)$, 我们把闭区间 $I_i^{(k)}$ 分成三个等份, 然后去掉中间的开区间, 把剩下的两个闭区间记作 $I_{2i-1}^{(k+1)}$ 与 $I_{2i}^{(k+1)}$. 这样我们就得到 2^{k+1} 个闭区闭 $I_i^{(k+1)}(i=1, 2, 3, \cdots, 2^{k+1})$, 它们中每个的长度都等于 $\frac{1}{3^{k+1}}$, 并且它们两两不相交. 令

$$E_{k+1}=\amalg_{i=1}^{2^{k+1}} I_i^{(k+1)}.$$

于是我们把作法推进一步, 从闭集 E_k, 作出闭集 E_{k+1}. 这样一来, 由归纳法, 我们就构作了 $\mathbb{R}$ 中一序列的闭集$\{E_n\}$. 令

$$C=\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n.$$

那末, C 就叫做康托尔集, 或者叫做康托尔的不连续统.

康托尔集具有下面的一些性质:

(8.4) 康托尔集 C 是一个非空闭集.

证 根据康托尔集的定义，显然 C 是实直线 $\mathbb{R}$ 的一个闭集. 我们去证明 $C\neq\emptyset$. 令 I_1 为康托尔集作法的第一步中剩下的两个闭区间之一，比如说，$I_1=\left[0,\ \frac{1}{3}\right]$. 设对于一个 $k\in\mathbb{N}$，闭区间 I_k 已有定义. 令 I_{k+1} 为 C 的作法的第 $k+1$ 步中没有被去掉并且包含于 I_k 的一个闭区间. 这样，由归纳法，我们就得到一个区间套：

$$I_1\supset I_2\supset I_3\supset\cdots\supset I_n\supset\cdots.$$

于是根据区间套原理，交集 $\bigcap_{n=1}^{\infty}I_n$ 既然不是空集，那就更应该有 $C\neq\emptyset$. ▌

(8.5) 康托尔集 C 不包含任何长度大于零的区间.

证 假定恰恰相反，康托尔集 C 包含一个长度 $l>0$ 的区间 I. 取自然数 n 充分大，s. t. $\frac{1}{3^n}<\frac{l}{2}$. 如前，我们用 $I_i^{(n)}(i=1,2,3,\cdots,2^n)$ 来表示 C 的作法的第 n 步中没有被去掉的所有闭区间. 如此，则

$$E_n=\coprod_{i=1}^{2^n}I_i^{(n)}.$$

令 c 表示区间 I 的中点. 那末，因为 $c\in E_n$，所以

$$\exists i_0\in A(2^n),\ \text{s. t.}\ c\in I_{i_0}^{(n)}.$$

令 $I_{i_0}^{(n)}=[\alpha,\ \beta]$. 因为

$$\beta-c\leqslant\frac{1}{3^n}<\frac{1}{2}l,\quad c-\alpha\leqslant\frac{1}{3^n}<\frac{1}{2}l,$$

所以 α 与 β 都属于 I. 于是将有 $I_{i_0}^{(n)}\subset I\subset C$. 但是这是不可能的，因为在作法的第 $n+1$ 步中 $I_{i_0}^{(n)}$ 的一部分已被去掉. ▌

(8.6) 康托尔集 C 是完备的.

证 任取一点 $p\in C$. 那末，必有

$$p\in\bigcap_{n=1}^{\infty}I_n,$$

其中的 I_n 表示在 C 的作法的第 n 步中剩下的闭区间之一，并且

$\{I_n\}$形成一序列区间套，而I_n的长当$n\to\infty$时递减而趋近于零．不难看出，任何包含点p的开区间J必然包含C中异于p的一点．事实上，I_n的长既然趋近于零，而J的长又大于零，当n充分大时，那就必然有$I_n\subset J$．在作法的第$n+1$步，我们从I_n得到两个闭区间，其中的一个就是包含点p的I_{n+1}，另一个记作I^*_{n+1}．既然$p\notin I^*_{n+1}$，而I^*_{n+1}中又必然至少有C的一点q，显然

$$q\neq p\wedge q\in J.$$

由此可见，C的任意一点p都是它自己的聚点；根据定义(4.28)，康托尔集C是自稠密的．但是根据(8.4)C又是$\mathbb{R}$的闭集．既然C是闭的自稠密集，根据定义(4.29)，康托尔集C就必然是完备的．】

(8.7) 康托尔集C是无处稠密的．

证 由于C是闭集，根据定义(4.26)及定义(4.25)，我们只须证明$\mathbb{R}=\overline{\mathscr{C}C}$．任取一点$p\in\mathbb{R}$．那末，或者$p\in\mathscr{C}C$或者$p\in C$．如果$p\in\mathscr{C}C$，则显然有$p\in\overline{\mathscr{C}C}$．如果$p\in C$，令$J$为包含$p$的任一开区间，则因为$J$的长度大于零，所以$J\not\subset C$．因此，

$$\exists p'\in J\ni\cdot p'\in\mathscr{C}C.$$

所以$p\in(\mathscr{C}C)'$、从而$p\in\overline{\mathscr{C}C}$．由此可见

$$\mathbb{R}=\overline{\mathscr{C}C}\ .】$$

(8.8) 实直线$\mathbb{R}$的任何非空完备集都具有连续统的势$\mathbf{c}$；特别地，康托尔集C也具有连续统的势：

$$\operatorname{card}C=\mathbf{c}.$$

证明从略[①]．

从(8.8)看出，康托尔集C是一个不可数集．

① 参阅И．П．那汤松著，徐瑞云译：《实变函数论》高等教育出版社(或人民教育出版社)，1958年新2版，上册，第二章，§6．

如果只要证明 $\operatorname{card} C=\mathbf{c}$, 则并不麻烦. 我们首先注意到, 如果把单位闭区间[0, 1]中的任一个实数 x 表示成三进小数, 则 x 可写成

$$x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{3^n}=0.a_1a_2a_3\cdots a_n\cdots, \tag{11}$$

其中 $\forall n\in\mathbb{N}$, $a_n=0$、1或2. 特别地,

$$0=0.000\cdots0\cdots,\quad 1=0.222\cdots2\cdots.$$

我们约定: 排除掉某一位小数为1、以后各位都是0的三进小数表示. 这样一来, 举例说, $\frac{1}{3}$ 将不表示成 $0.100\cdots0\cdots$ (即0.1), 而表示成 $0.0222\cdots2\cdots$:

$$\frac{1}{3}=0.0222\cdots2\cdots.$$

于是, 康托尔集 C 的每个点 x 如果用(11)中的三进小数来表示, 它的各位小数 a_n 都不会是1, 即 $a_n=0$ 或 2, 而且用这样的三进小数表示的点 x 必定属于 C. 这是因为, 对于每个 $n\in\mathbb{N}$, 在构造康托尔集的第 n 步中, 去掉的是在形如(11)的三进小数表示中第 n 位小数 $a_n=1$ 的所有点, 而没有去掉其他任何点.

令 $X=\{0, 2\}$, 并且 $\forall x=0.a_1a_2a_3\cdots a_n\cdots\in C$,

令 $$f(x)=(a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots)\in X^{\infty},$$

那末, 显然 f 是康托尔集 C 到 X^{∞} 上的一个双一一函数. 因此, $C\sim X^{\infty}$. 从预篇第七节中提到的事实看出, $\operatorname{card} X^{\infty}=\mathbf{c}$, 所以 $\operatorname{card} C=\mathbf{c}$.

现在如例31中那样, 把 X^{∞} 看成离散空间 $X=\{0, 2\}$的积空间, 并把康托尔集看成实直线 $\mathbb{R}$ 的子空间, 则不难证明上面定义的双一一函数 f 还是康托尔集 C 到积空间 X^{∞} 上的一个拓扑映射, 即 $C\approx X^{\infty}$.

康托尔集的性质给人们以许多启示: 首先, 完备集的定义可

以使人们误认为，实直线的完备集或者是空集，或者是一些非退化的闭区间的分离并．康托尔集是这一错误猜想的一个很好的反例．又根据无处稠密的定义，似乎无处稠密集不可能同时又是自稠密的．康托尔集的性质对此又是一个很好的反例．此外，从康托尔集的构造粗略地看来，似乎它只由闭区间 $I_i^{(n)}$ [见(8.5)的证明]的端点所构成．然而实际上，它所包含的点远比这些端点多得多，因为只由这些端点构成的不过是它的一个无穷可数子集，除此之外，它还含有 $\mathbf{c}$ 个点．从这种种事实看来，生动的直观虽然是发现和认识真理的源泉，可是单凭直观又是多么容易造成错觉．

习　　题

I．令 X 表示实数域 $\mathbf{R}$（或复数域 $\mathbb{C}$）上的一个线性空间（也叫做向量空间）．如果函数 $\| \ \|: X\to\mathbf{R}$ 能使下面三个条件满足：

N_1、正定性：$\forall x\in X,\ \|x\|\geqslant 0;\quad \|x\|=0\Leftrightarrow x=0;$

N_2、齐次性：$\forall \alpha\in\mathbb{C}(\alpha\in\mathbb{C})\wedge\forall x\in X,\ \|\alpha x\|=|\alpha|\cdot\|x\|;$

N_3、三角形不等式：$\forall(x, y)\in X^2,\ \|x+y\|\leqslant\|x\|+\|y\|$；那末，$(X, \| \ \|)$ 叫做一个线性赋范空间，$\|x\|$ 叫做 x 的范数．

求证：

1．对于典型的实数域 $\mathbf{R}$ 上的 n 维向量空间 $\mathbf{R}^n$ 中的任意一对元素

$$x=(x_1, x_2, \cdots, x_n),\quad y=(y_1, y_2, \cdots, y_n),$$

可定义数积（内积）

$$x\cdot y=\sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

由此定义 x 的范数为

$$\|x\|=\sqrt{x\cdot x}=\sqrt{x^2}.$$

那末，$(\mathbf{R}^n, \| \ \|)$ 是一个线性赋范空间．若定义 $d(x, y)=\|x-y\|$，则 d 为 $\mathbf{R}^n$ 上的一个度量，度量空间 $(\mathbf{R}^n, d)$ 就是 n 维欧氏空间．

2．每个线性赋范空间都是一个度量空间．

3．令 $X=C([a, b])$（见例 5）．$\forall f\in X$，定义

$$\|f\|_1=\int_a^b |f(x)|\,dx$$

则$(X, \| \ \|_1)$是一个线性赋范空间.

4. 对于同一个集合 $X=C([a, b])$, $\forall f\in X$, 若定义

$$\|f\|_2=\sup_{a\leq x\leq b}|f(x)|, \tag{12}$$

则得到另一个线性赋范空间$(X, \| \ \|_2)$. 若按题 2 利用范数 (12) 定义 X 上的度量 d, 则在度量空间(X, d)中点列$\{f_n\}$收敛于点 $f\Leftrightarrow$ 在闭区间$[a, b]$上函数列$\{f_n\}$一致收敛于函数 f.

II. 试求下面给出的点集 A 的闭包、导集、内部、外部和边界:

1. 在实直线 $\mathbf{R}$ 中, $A=\left\{\frac{1}{n}\middle| n\in \mathbf{N}\right\}$.
2. 在平面 $\mathbf{R}^2$ 上, $A=\mathbf{Q}^2$.
3. 在实直线 $\mathbf{R}$ 中, $A=C$, 为康托尔集.
4. 在 n 维欧氏空间 $\mathbf{R}^n$ 中, $A=\{x\in \mathbf{R}^n \mid \|x\|=\sqrt{x^2}\leq 1\}$.

III. 下列各题中的点集都假定是一个给定的拓扑空间 X 的点集, 又记号"$f:X\to Y$ 连续"表示"空间 X 到空间 Y 内的函数 f 是连续的".

试证下列各命题:

1. $\mathrm{Int}(\bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha)\subset \bigcap_{\alpha\in I}\mathrm{Int}\,A_\alpha$.
2. $\bigcup_{\alpha\in I}\overline{A}_\alpha\subset \overline{\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha}$.
3. 设 $f, g: X\to\mathbf{R}$ 连续. 令

$$B=\{x\in X \mid f(x)\leq 1\},\ C=\{x\in X \mid f(x)\neq g(x)\};$$

那末, B 是闭集, C 是开集.

4. $A\subset B\Rightarrow A'\subset B'\wedge \overline{A}\subset \overline{B}$.
5. F 是闭集 $\wedge F'\subset G\subset F\Rightarrow G$ 是闭集.
6. A 无处稠密 $\Leftrightarrow \mathrm{Int}\,\overline{A}=\emptyset$.
7. A 是闭集且无处稠密 $\Leftrightarrow \exists$ 开集 U, s.t. $A=\partial U$.
8. A 自稠密且 $A\subset B\subset A'\Rightarrow B$ 自稠密.
9. A 自稠密 $\Rightarrow A'$ 与 $\overline{A}$ 都自稠密.
10. $f:X\to Y$ 连续 $\Leftrightarrow (B\subset Y\Rightarrow \overline{f^{-1}(B)}\subset f^{-1}(\overline{B}))$.
11. 设 $f:X\to Y$, $x\in X$. f 在点 x 处连续 $\Rightarrow$(在 X 中 $\lim_{n\to\infty}x_n=x\Rightarrow$ 在 Y 中 $\lim_{n\to\infty}f(x_n)=f(x)$). 试举例说明, 这个命题的逆命题不真.
12. $f:X\to Y$ 连续 $\Leftrightarrow (A\subset X\Rightarrow f(A')\subset\overline{f(A)})$.

IV. 设$(A, \mathscr{T}/A)$是拓扑空间$(X, \mathscr{T})$的子空间，$B\subset A$并用$\bar{B}_A$、B'_A、$\mathrm{Int}_A B$、$\mathrm{Ext}_A B$、$\partial_A B$ 分别表示在子空间$(A, \mathscr{T}/A)$中点集B的闭包、导集、内部、外部和边界. 试证或反证(disprove)：

1. $\bar{B}_A=\bar{B}$.
2. $\bar{B}_A=\bar{B}\cap A$.
3. $B'_A=B'$.
4. $B'_A=B'\cap A$.
5. $\mathrm{Int}_A B=\mathrm{Int}\, B$.
6. $\mathrm{Int}\, B\subset \mathrm{Int}_A B$.
7. $\mathrm{Ext}_A B+\mathrm{Ext}\, B$.
8. $\mathrm{Ext}_A B=\mathrm{Ext}\, B\cap A$.
9. $\partial_A B=\partial B$.
10. $\partial_A B=\partial B\cap A$.
11. $\mathrm{Int}_A B=\mathrm{Int}\, B\cap A$.

V. 设$(X, \mathscr{T})$是一族拓扑空间$\{(X_\alpha, \mathscr{T}_\alpha)\}_{\alpha\in I}$的积空间，并设$\forall\alpha\in I$, $A_\alpha\subset X_\alpha$，令$A=\prod_{\alpha\in I}A_\alpha$. 求证：

1. $\bar{A}=\prod_{\alpha\in I}\bar{A}_\alpha$.
2. $\forall\alpha\in I$, A_α是$\{X_\alpha, \mathscr{T}_\alpha\}$的闭集$\Rightarrow A$是$(X, \mathscr{T})$的闭集.
3. 当$I=\mathbf{N}$，且$\forall\alpha\in I$, $X_\alpha=\{0, 2\}$, $\mathscr{T}_\alpha$为离散拓扑时，则积空间$(X, \mathscr{T})$与康托尔集同胚(此时$X=\{0, 2\}^{\infty}$).
4. $\mathrm{Int}\prod_{\alpha\in I}A_\alpha\subset\prod_{\alpha\in I}\mathrm{Int}\, A_\alpha$. 问等式

$$\mathrm{Int}\prod_{\alpha\in I}A_\alpha=\prod_{\alpha\in I}\mathrm{Int}\, A_\alpha$$

是否成立?

VI*. 令A为一个随意的非空集合，又$\forall\alpha\in I$，令φ_α: $A\to X_\alpha$，其中X_α为拓扑空间. 我们还假定：

$$\forall(x, y)\in A^2,\ x\neq y,\ \exists\alpha\in I,\ \text{s.t.}\ \varphi_\alpha(x)\neq\varphi_\alpha(y).$$

试给A上使一切φ_α连续的最小拓扑下一个新的定义，使它是某个积空间的子空间的拓扑.

VII*. 任意固定一个质数$p\in\mathbf{N}$. $\forall n\in\mathbf{N}$及$\forall m\in\mathbf{Z}$，令$f_n(m)$表示p^n除m的余数：

$$m=p^n q+f_n(m).\ (0\leqslant f_n(m)<p^n)$$

令$\mathscr{T}_0$表示$\mathbf{Z}$上的离散拓扑. 那末，$\forall n\in\mathbf{N}$, f_n: $\mathbf{Z}\to(\mathbf{Z}, \mathscr{T}_0)$. 设$\mathscr{T}$是$\mathbf{Z}$上能使一切$f_n$都连续的最小拓扑. 求证：

1. 空间$(\mathbf{Z}, \mathscr{T})$不是离散的：$\mathscr{T}\neq\mathscr{T}_0$.
2. 令φ, ψ: $\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}\to\mathbf{Z}$, s.t. $\forall(x, y)\in\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$,

$$\varphi(x, y)=x+y,\quad \psi(x, y)=xy.$$

那末，φ与ψ都是积空间$(\mathbf{Z}, \mathscr{T})\times(\mathbf{Z}, \mathscr{T})$到空间$(\mathbf{Z}, \mathscr{T})$内的连续函数.

3. $(\mathbb{Z}, \mathscr{T})$到实直线$\mathbf{R}$内的内射函数$i$不连续.

4. 如果m不为p所整除,并且如果令$K_m^{(0)}=\bar{0}\in\mathbb{Z}_m$,那末,在空间$(\mathbb{Z}, \mathscr{T})$中$1\in K_m^{(0)}$.

VIII. 设函数$f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$的定义如下:

$$\forall x\in\mathbf{R}, \quad f(x)=\cos x.$$

设$\mathscr{T}$是$\mathbf{R}$上的自然拓扑,$\mathscr{T}^*$是使$f:\mathbf{R}\to(\mathbf{R}, \mathscr{T})$连续的定义域$\mathbf{R}$(实数系)上的最小拓扑. 求证:

1. 如果U是空间$(\mathbf{R}, \mathscr{T}^*)$的任意非空开集,且$x\in U$,则$-x\in U$,而且$\forall n\in\mathbb{Z}$, $x+2n\pi\in U$.

2. 令$\varphi(x)=\sin x$; 则φ不是空间$(\mathbf{R}, \mathscr{T}^*)$到实直线$(\mathbf{R}, \mathscr{T})$内的连续函数.

IX. 如果一个群$(G, \cdot)$上有一个拓扑$\mathscr{T}$使得群的运算

$$f:(G, \mathscr{T})\times(G, \mathscr{T})\to(G, \mathscr{T}), \ f(a, b)=a\cdot b$$

及

$$\varphi:(G, \mathscr{T})\to(G, \mathscr{T}), \ \varphi(a)=a^{-1}$$

都连续,那末,$(G, \cdot, \mathscr{T})$就叫做一个拓扑群. 显然,运算f与φ都连续的要求可用一个条件来代替,即要求$\psi:(a, b)\to ab^{-1}$的连续性.对于加群$(G, +)$为拓扑群的定义,只须在上述定义中作符号方面的改变; $\psi:(a, b)\to a-b$为连续.

仿上可定义环(或体)$(R, +, \cdot)$为**拓扑环**或**拓扑体**,即要求R上有一拓扑$\mathscr{T}$,使运算

$$(a, b)\to a-b \quad 与 \quad (a, b)\to a\cdot b$$

为积空间$(R, \mathscr{T})^2$到$(R, \mathscr{T})$内的连续函数. 当R为体时还要求$\forall a\neq 0$, $a\to a^{-1}$为连续. 拓扑环或体将记作

$$(R, +, \cdot, \mathscr{T}).$$

可交换拓扑体称为**拓扑域**. 同样可定义拓扑域上的**拓扑向量空间**或**拓扑代数**.

1. 问题VII中的$(\mathbb{Z}, +, \cdot, \mathscr{T})$是否是一个拓扑环?

2. 设$\mathbf{R}$表示实直线. 求证:

(1) $(\mathbf{R}, +)$是一个拓扑群;

(2) $(\mathbf{R}, +, \times)$是一个拓扑域;

(3) $(\mathbf{R}, +, \times, /\mathbf{R})$是$\mathbf{R}$上的拓扑代数.

(4) 在复数域 $\mathbb{C}$ 上取自然拓扑，即将 $\mathbb{C}$ 看成 $\mathbf{R}$ 上的线性赋范空间 $(\forall z\in\mathbb{C},\ \|z\|=|z|)$，则 $(\mathbb{C},\ +,\ \times,\ /\mathbf{R})$ 也是 $\mathbf{R}$ 上的一个拓扑代数.

X. 设 X 是一个非空集合，并设 $\mathscr{F}\subset\mathscr{P}(X)$，$\mathscr{F}\neq\emptyset$. 如果集类 $\mathscr{F}$ 能使下列公理满足:

C_1、$\mathscr{F}$ 的元素的任意有限并是 $\mathscr{F}$ 的一个元素;

C_2、$\mathscr{F}$ 的元素的任意交是 $\mathscr{F}$ 的一个元素;

那末，$\mathscr{F}$ 就叫做集合 X 上的一个 C-拓扑，$(X,\ \mathscr{F})$ 叫做 C-拓扑空间，$\mathscr{F}$ 的每个元素叫做空间 $(X,\ \mathscr{F})$ 的一个闭集，或者说它闭于空间 $(X,\ \mathscr{F})$ 中；公理 C_1 与 C_2 叫做闭集公理. C-拓扑空间也简称为 C-空间.

在 C-空间 $(X,\ \mathscr{F})$ 中设 $\mathscr{B}_C\subset\mathscr{F}$. 如果 $(X,\ \mathscr{F})$ 的每个闭集都是集类 $\mathscr{B}_C$ 中一族元素的交集，则 $\mathscr{B}_C$ 叫做 C-拓扑 $\mathscr{F}$ 或 C-拓扑空间 $(X,\ \mathscr{F})$ 的一个闭基. 如果 $\mathscr{B}_C$ 中元素的有限并构成 $\mathscr{F}$ 的一个闭基，则 $\mathscr{B}_C$ 叫做 $\mathscr{F}$ 或 $(X,\ \mathscr{F})$ 的一个闭亚基.

求证:

1. $\emptyset\in\mathscr{F}$，$X\in\mathscr{F}$，即 $\emptyset$ 与 X 都是空间 $(X,\ \mathscr{F})$ 的闭集.

2. 令

$$\mathscr{T}=\{U\in\mathscr{P}(X)\mid\exists F\in\mathscr{F}\ni\cdot\ U=\complement F=X-F\}.$$

那末，$\mathscr{T}$ 是 X 上的一个拓扑，而且 $F\in\mathscr{F}\Leftrightarrow F$ 是拓扑空间 $(X,\ \mathscr{T})$ 的闭集.

$\mathscr{T}$ 的每个元素叫做 C-拓扑空间 $(X,\ \mathscr{F})$ 的开集，同时当然也是拓扑空间 $(X,\ \mathscr{T})$ 的开集.

拓扑 $\mathscr{T}$ 称为由 C-拓扑 $\mathscr{F}$ 所导致. 拓扑空间 $(X,\ \mathscr{T})$ 称为由 C-拓扑空间 $(X,\ \mathscr{F})$ 所转化.

反过来，我们已经知道，对于任意的拓扑空间 $(X,\ \mathscr{T})$，拓扑 $\mathscr{T}$ 也导致 X 上的一个 C-拓扑

$$\mathscr{F}=\{F\in\mathscr{P}(X)\mid\exists U\in\mathscr{T}\ni\cdot\ F=\complement U\}.$$

即 $\mathscr{F}$ 为空间 $(X,\ \mathscr{T})$ 的一切闭集所成的类. 于是得到一个由拓扑空间 $(X,\ \mathscr{T})$ 所转化的 C-拓扑空间 $(X,\ \mathscr{F})$.

因此空间 $(X,\ \mathscr{F})$ 与空间 $(X,\ \mathscr{T})$ 是互相转化的，或者说它们是同一个拓扑空间. 因此，空间 $(X,\ \mathscr{F})$ 的闭基或闭亚基，也可以

称为拓扑空间$(X, \mathscr{T})$或拓扑 $\mathscr{T}$ 的闭基或闭亚基.

3. 设$\{X_\alpha\}$是任意的一族拓扑空间，并设 $X=\prod_\alpha X_\alpha$ 是这一族空间的积空间. 令

$$\mathscr{S}_C=\{p_\alpha^{-1}(F_\alpha)\mid \forall \alpha,\ F_\alpha \text{闭于} X_\alpha \text{中}\},$$

那末，$\mathscr{S}_C$ 是积空间 X 的一个闭亚基.

第二章　连　通　性

毫无疑问，几何学与数学分析中的许多重要事实，实际上是建筑在“连通性”这一重要的拓扑概念的基础之上的。它在直观上应该说对读者并不陌生。我们现在的目的在于赋予它最一般的意义并揭露它的本质，然后把所得的理论应用于欧氏空间。本章除了论述一般拓扑空间的连通性外，还将论述度量空间的连通性，并引入与连通性密切相关的两类特殊度量空间，即凸空间与完全度量空间，它们就其本身而论，也有着重要的意义。

一、连 通 空 间

这一节与下一节都只阐述连通性的一般理论。我们首先给出连通空间的定义如下：

(1.1)　**定义**　设 X 是任一给定的拓扑空间。如果 X 不能用两个非空开集的分离并来表示，换句话说

$$\sim\cdot\exists X \text{ 的开集 } U\neq\emptyset,\ V\neq\emptyset,\ \text{s. t. } X=U\coprod V,$$

那末，X 就叫做一个连通空间。如果拓扑空间 X 的非空点集 A 作为 X 的子空间是连通的，那末，A 就叫做空间 X 的**连通集**。

我们约定：空集是任何空间的连通集。

由定义(1.1)立即推出：

(1.2)　空间 X 是连通的 $\Leftrightarrow\sim\cdot\exists X$ 的非空闭集 F 与 G, s. t.

$$X=F\coprod G.$$

证　假定条件满足而空间 X 不连通。那末，$\exists$ 非空开集 U 及 V, s. t. $X=U\coprod V$. 令

$$F=\mathscr{C}U,\qquad G=\mathscr{C}V;$$

则 F 与 G 都是 X 的闭集. 因为 $F=V$, $G=U$, 所以 $F\neq\emptyset$, $G\neq\emptyset$, 且 $X=F\coprod G$. 这与所设矛盾.

反之, 假定空间 X 是连通的. 如果 $\exists$ 非空闭集 F 与 G, s. t. $X=F\coprod G$, 则 F 与 G 既然互为余集, 那就必须同时又是开集. 于是根据定义(1.1), 空间 X 将不是连通的. 这又引出了矛盾. 因此条件必须满足.]

由定义(1.1)立即看出: A 是空间 X 的连通集 $\Leftrightarrow\sim\cdot\exists X$ 的非空开集(闭集) U 及 V, s. t. $A\cap U\neq\emptyset$, $A\cap V\neq\emptyset\wedge A=A\cap(U\coprod V)$.

我们在下面引入两个点集"互相隔离"的概念, 从而推导出比较常用的刻划空间及其点集的连通性的条件.

(1.3) **定义** 设 A 与 B 是空间 X 的两个非空点集. 如果

$$A\cap B=\emptyset,$$

并且 A 与 B 都相对地开于子空间 $A\coprod B$ 中, 则 A 与 B 叫做互相隔离的.

(1.4) A 与 B 是互相隔离的 $\Leftrightarrow\overline{A}\cap B=\overline{B}\cap A=\emptyset$.

证 显然, 当 $A\neq\emptyset\wedge B\neq\emptyset$ 时, A 与 B 是互相隔离的 $\Leftrightarrow A\cap B=\emptyset\wedge A$ 与 B 相对地闭于 $A\coprod B$ 中 $\Leftrightarrow A=\overline{A}\cap(A\coprod B)=(\overline{A}\cap B)\coprod A\wedge B=\overline{B}\cap(A\coprod B)=(\overline{B}\cap A)\coprod B\Leftrightarrow\overline{A}\cap B=\overline{B}\cap A=\emptyset$.]

下面的两个命题是明显的.

(1.5) 空间 X 是连通的 $\Leftrightarrow\sim\cdot\exists$ 互相隔离的点集 U 与 V $\ni\cdot$

$$X=U\coprod V.$$

(1.6) 令 S 为空间 X 的一个非空点集. S 是连通集 $\Leftrightarrow\sim\cdot\exists X$ 的两个互相隔离的点集 A 与 B, s. t. $S=A\coprod B$.

我们现在进一步去发掘关于连通集的一些有趣的性质.

(1.7) **定理** 设 $\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$ 是空间 X 的一族连通集, B 也是 X 的一个连通集, s. t. $\forall\alpha\in I$, $B\cap A_\alpha\neq\emptyset$. 那末, 若令

$$A=B\cup(\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha),$$

则 A 是空间 X 的一个连通集. 特别地, 当 $X=A$ 时, X 是一个连通空间.

证 假定恰恰相反, A 不是连通的. 那末, 将有空间 X 的开集 U、V, s. t. $A=(A\cap U)\amalg(A\cap V)$, 于此

$$A\cap U\neq\emptyset,\quad A\cap V\neq\emptyset.$$

显而易见, $\forall\alpha\in I$,

$$A_\alpha=(A_\alpha\cap U)\amalg(A_\alpha\cap V),$$

又
$$B=(B\cap U)\amalg(B\cap V).$$

因为 $\forall\alpha\in I$, A_α 是连通的, 所以我们必须有

$$A_\alpha\cap U=\emptyset\vee A_\alpha\cap V=\emptyset;$$

于是
$$A_\alpha=A_\alpha\cap U\vee A_\alpha=A_\alpha\cap V.$$

这就是说, $\forall\alpha\in I$, 将有

$$A_\alpha\subset U\vee A_\alpha\subset V.$$

同理, 我们有

$$B\subset U\vee B\subset V.$$

不妨设 $B\subset U$ 而不失一般性. 因为 $\forall\alpha\in I$, $A_\alpha\cap B\neq\emptyset$, 所以 $A_\alpha\not\subset V$. 由此可见, $\forall\alpha\in I$, $A_\alpha\subset U$. 因此, $A\subset U$. 于是 $A\cap V=\emptyset$. 这是不可能的. ▌

由此可见,

(1.8) **系** 设 $\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$ 是空间 X 的连通集的一个非空族, 并且

$$\forall(\alpha,\beta)\in I^2,\quad A_\alpha\cap A_\beta\neq\emptyset.$$

那末, $A=\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha$ 是连通的. 特别地, 当 $X=A$ 时, X 是一个连通空间.

证 只须取任一 $\alpha_0\in I$，并令 A_{α_0} 为定理(1.7)中的 B. ▌

(1.9) **系** 如果 $\{A_\alpha\}$ 是空间 X 的连通集的一个非空族，并且 $\bigcap_\alpha A_\alpha\neq\emptyset$，则 $\bigcup_\alpha A_\alpha$ 是连通的. 特别地，当 $X=\bigcup_\alpha A_\alpha$ 时，X 是一个连通空间.

(1.10) 如果 A 是空间 X 的一个连通集，并且 B 是能使

$$A\subset B\subset \overline{A}$$

的任意点集，那末，B 也是连通的.

证 设 $B=F\coprod G$，且 F 与 G 相对地闭于 B 中. 我们去证明：$F=\emptyset\vee G=\emptyset$. 实际上，既然 $A\subset B$，那末就应该有

$$A=(F\cap A)\coprod(G\cap A).$$

显然 $F\cap A$ 与 $G\cap A$ 都相对地闭于 A 中，而且因为 A 是连通的，所以

$$F\cap A=\emptyset\vee G\cap A=\emptyset.$$

不失一般性，假定 $F\cap A=\emptyset$. 于是 $A=G\cap A$，即 $A\subset G$. 由此可见，$\overline{A}\subset\overline{G}$. 因为 $B\subset\overline{A}$，又 G 相对地闭于 B 中，所以我们有 $B=B\cap\overline{G}=G$. 这样，我们就证明了 $F=\emptyset$. ▌

(1.11) **系** 任何连通集的闭包是连通的.

证 只须在(1.10)中取 $B=\overline{A}$，如果 A 是连通的话. ▌

(1.12) 如果空间 $X=A\cup B$，且 A 与 B 闭于 X 中，又空间 X 与点集 $A\cap B$ 都是连通的，那末，A 与 B 也都是空间 X 的连通集.

证 假定 A 不连通. 由于 A 是闭集，因而 ∃ 非空闭集 F_1 与 F_2, s. t. $A=F_1\coprod F_2$. 有两种情形可能发生：

1° $$F_1\cap A\cap B\neq\emptyset\wedge F_2\cap A\cap B\neq\emptyset.$$

在这一情形下，我们有

$$(F_1\cap A\cap B)\cup(F_2\cap A\cap B)=(F_1\cup F_2)\cap(A\cap B)=A\cap B,$$

$$(F_1\cap A\cap B)\cap(F_2\cap A\cap B)=(F_1\cap F_2)\cap(A\cap B)=\emptyset,$$

这与 $A\cap B$ 的连通性矛盾.

2° $$F_1\cap A\cap B=\emptyset \vee F_2\cap A\cap B=\emptyset.$$

不妨设 $F_1\cap A\cap B=\emptyset$. 那末,因为 $F_1\subset A$, 所以 $F_1\cap B=\emptyset$. 既然

$$X=(F_1\cup F_2)\cup B=F_1\cup(F_2\cup B),$$

其中 F_1 与 $F_2\cup B$ 都是空间 X 的非空闭集,并且

$$F_1\cap(F_2\cup B)=(F_1\cap F_2)\cup(F_1\cap B)=\emptyset,$$

于是这又与空间 X 的连通性矛盾.

由此可见,无论在任何情况下,由 A 的不连通都会引出矛盾. 因此点集 A 必须是连通的. 由于 A 与 B 在所给条件中处于均衡地位,与此同时,我们也就证明了点集 B 的连通性.]

(1.13) **定理** 如果 $f: X\to Y$ 连续,又 A 是空间 X 的一个连通集,那末,$f(A)$ 是空间 Y 的一个连通集.

证 如果 $f(A)$ 不连通,则 ∃ 空间 Y 的两个不相交的非空点集 G_1 与 G_2, 它们相对地开于 $f(A)$ 中, s. t. $f(A)=G_1\coprod G_2$.

令 $$A_1=A\cap f^{-1}(G_1),\quad A_2=A\cap f^{-1}(G_2).$$

显而易见, $A_1\neq\emptyset$, $A_2\neq\emptyset$, 又

$$A_1\cap A_2=A\cap f^{-1}(G_1\cap G_2)=\emptyset,$$

此外, $$A_1\coprod A_2=A\cap f^{-1}(G_1\coprod G_2)=A\cap f^{-1}(f(A))=A.$$

因为 f 是连续的,所以 A_1 与 A_2 都相对地开于 A 中. 这说明了 A 不连通,与假设矛盾. 因此, $f(A)$ 必须是空间 Y 的连通集.]

特别地

(1.14) **系** 如果 X 是一个连通空间,又 $f: X\to Y$ 连续,则 $f(X)$ 是空间 Y 的一个连通集;因此当 f 是满函数时, Y 也是一个连通空间.

由此可见:

(1.15) **系** 空间(或点集)的连通性是一个拓扑性质.

我们在下面举几个简单的但不很自然的连通空间的例子,比

较自然和比较复杂的例子留待以后举出.

例 1 在例(一)14① 中提到的西尔宾斯基空间以及例(一)18中的空间$(X, \mathscr{T})$都是连通的,因为它们符合定义(1.1)的要求.

例 2 任何拓扑空间的单点集都是它的连通集. 又$\forall X\neq\emptyset$,若$\mathscr{T}=\{X, \emptyset\}$,则空间$(X, \mathscr{T})$显然连通.

例 3 至于不连通的空间,我们举出任何离散空间为例,除非它只包含单独的一个点. 包含两个以上的点的离散空间还有一个特点,那就是,它的包含两个或两个以上的点的子集都不连通. 这样的空间叫做**完全不连通的**. 换句话说,凡是由至少两个点构成的离散空间都是完全不连通的. 但是反过来却不对:完全不连通的空间不一定是离散空间,例如康托尔集$\boldsymbol{C}$就是完全不连通的,但不是离散的.

例 4 任取一个点$a\in\mathbb{R}$. 令

$$X=]-\infty, \quad a[\cup]a, \quad +\infty[.$$

$]-\infty, a[$ 与 $]a, +\infty[$ 不但是$\mathbb{R}$的开集,也是它的子空间X的非空开集. 由此可见,X是不连通的. 以后我们将证明,所有的区间(包括退化的在内)都是实直线$\mathbb{R}$的连通集,所以X不是完全不连通的.

二、空间的分支·连通空间的积空间

设X是一个拓扑空间. 我们定义X中的一个二元关系R如下:

$$pRq\Leftrightarrow\exists \text{空间 } X \text{ 的一个连通集 } A\ni\cdot p, q\in A.$$

因为空间X的每个单元点集$\{p\}$是连通的,所以

① 例(一)14指的是第一章的例14,依此类推.

$$\forall p\in X,\quad pRp$$

总成立，即 R 具有自反性．关系 R 具有对称性是明显的：

$$pRq\Rightarrow qRp.$$

现在假定 pRq 与 qRr 成立．那末，$\exists X$ 的连通集 A 与 B, s. t.

$$p,\ q\in A\wedge q,\qquad r\in B.$$

因为 $q\in A\cap B$，所以根据(1.8)，$A\cup B$ 是连通的．既然

$$p\in A\cup B\wedge r\in A\cup B,$$

那末，pRr 必然成立．因此关系 R 又具有传递性．由此可见，R 是 X 上的一个等价关系．于是我们得到 X/R，即 X 对于 R 的商集．

(2.1) **定义** 商集 X/R 的每个元素都叫做空间 X 的一个分支．换句话说，空间 X 的分支就是关于等价关系 R 的等价类．

下面命题的真实性是明显的．

(2.2) 如果空间 X 的一个连通集 A 与 X 的一个分支 C 相交，那末，$A\subset C$.

证 依假设 $\exists p\in A\cap C$．令 q 为 A 中的任一点．因为 A 是连通的，所以 pRq 成立．但是 $p\in C$；可见 $q\in C$．因此 $A\subset C$．▌

(2.3) C 是空间 X 的分支 $\Rightarrow C$ 是连通的．

证 分支 C 既为关于等价关系 R 的等价类，因而 $\exists$ 点 $p_0\in C$．按等价关系 R 的定义，$\forall p\in C$，由于 pRp_0 成立，因而 $\exists$ 空间 X 的一个连通集 $A_p\ni\cdot p,\ p_0\in A_p$．因为 $p_0\in A_p\cap C$，所以根据(2.2)，$A_p\subset C$．由此可见

$$C=\bigcup_{p\in C}A_p.$$

既然 $p_0\in\bigcap_{p\in C}A_p$，于是从(1.9)立即推出 C 是空间 X 的一个连通集．▌

(2.4) **系** 每个分支 C 都是空间 X 的极大连通集．换言之，若 A 是 X 的连通集，C 是 X 的分支，则 C 为连通集，且

$$C\subset A\Rightarrow A\subset C.$$

证 由于$C\neq\emptyset$，这是(2.2)与(2.3)的直接推论. ▌

系(2.4)的逆命题显然也真，即空间X的极大连通集必为X的分支.

下面的命题是(2.4)的直接推论.

(2.5) **系** 空间X的每个分支C必定是闭集.

证 根据(2.3)及(1.11)$\bar{C}$是空间X的连通集. 但是$C\subset\bar{C}$. 于是根据(2.4)，我们有$\bar{C}\subset C$. 因此$C=\bar{C}$，从而知道C是闭集. ▌

令A为空间X的一个随意非空点集. 我们称X的子空间A的分支为点集A的分支. 根据系(2.5)，点集A的分支必然相对地闭于子空间A中.

我们现在去证明下面的重要定理.

(2.6) **定理** 如果$\{X_i\}_{i\in I}$是连通空间的任意一个非空族，那末，积空间$X=\prod_{i\in I}X_i$也是连通的.

证* 在积空间X中任取满足如下条件的两个点$p=\{p_i\}_{i\in I}$及$q=\{q_i\}_{i\in I}$: 除$i=i_0\in I$外，对于I中任意其他的标号i，总有$p_i=q_i$. 我们去证明p和q属于空间X的同一分支.

事实上，令

$$A=\{r=\{r_i\}\in X\,|\,\forall i\neq i_0,\ r_i=p_i=q_i\}.$$

如此，则集合A包含点p与点q. 如果我们能够断定积空间X的子空间A与空间X_{i_0}同胚，那末，A就必然是连通的了. 为此，定义$f: A\to X_{i_0}$如下:

$$\forall r\in A,\quad 令\quad f(r)=r_{i_0}\in X_{i_0},$$

于此，r_{i_0}是点r的i_0坐标. 显然f是i_0坐标函数在点集A上的限制，所以它是子空间A到空间X_{i_0}内的一个连续函数，并且它显然是一个单函数. 既然我们可以取随意的一点$r_{i_0}\in X_{i_0}$作为A的一点r的i_0坐标，可见f还是一个满函数. 不难断定f的反函数f^{-1}也是连续的. 事实上，既然空间X_{i_0}的任意点r_{i_0}在f^{-1}之下的象为A中的点$f^{-1}(r_{i_0})$，它的i_0坐标就是$r_{i_0}=f_{i_0}^{-1}(r_{i_0})$，而$\forall i\neq i_0$，它的$i$坐标为$p_i=f_i^{-1}(r_{i_0})$，那末，$\forall i\in I$，$f_i^{-1}$或者是恒

等函数，或者是常值函数，无论怎样，f_i^{-1}(f^{-1} 的 i 分支函数)都是连续的. 于是根据定理(1.6.19)，f^{-1} 必定连续. 由此可见，f 是子空间 A 到连通空间 X_{i_0} 上的一个同胚. 这证明了 A 是空间 X 的连通集. 所以点 p 和点 q 属于积空间 X 的同一分支.

设 p 与 q 为积空间 X 的任意两个点，它们的对应坐标不相同的只有有限多个:

$$p=(\cdots,\ p_{i_1},\ \cdots,\ p_{i_2},\ \cdots,\ p_{i_3},\ \cdots\cdots,\ p_{i_m},\ \cdots),$$
$$q=(\cdots,\ q_{i_1},\ \cdots,\ q_{i_2},\ \cdots,\ q_{i_3},\ \cdots\cdots,\ q_{i_m},\ \cdots),$$

其中 $p_{i_1}\neq q_{i_1}$, $p_{i_2}\neq q_{i_2}$, $p_{i_3}\neq q_{i_3}$, $\cdots$, $p_{i_m}\neq q_{i_m}$, 但是所有其他的对应坐标都相同. 现在令

$$p^{(1)}=(\cdots,\ q_{i_1},\ \cdots,\ p_{i_2},\ \cdots,\ p_{i_3},\ \cdots\cdots,\ p_{i_m},\ \cdots),$$
$$p^{(2)}=(\cdots,\ q_{i_1},\ \cdots,\ q_{i_2},\ \cdots,\ p_{i_3},\ \cdots\cdots,\ p_{i_m},\ \cdots),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$p^{(m)}=(\cdots,\ q_{i_1},\ \cdots,\ q_{i_2},\ \cdots,\ q_{i_3},\ \cdots\cdots,\ q_{i_m},\ \cdots)=q.$$

因为点 $p^{(1)}$ 和点 p 只有一个对应坐标不同，所以 $p^{(1)}$ 和 p 属于同一分支; 同样，$p^{(2)}$ 和 $p^{(1)}$ 属于同一分支，依此类推. 因此，点 p 和点 q 属于同一分支.

最后，令 $p=\{p_i\}$ 是积空间 X 中任意一点，并令 C 为积空间 X 中包含点 p 的分支. 在空间 X 中任意取一点 $q=\{q_i\}$. 不难看出，$q\in\overline{C}$. 事实上，设 U 是空间 X 中点 q 的一个随意开邻域. 那末，$\exists$ 标号 i_1, i_2, $\cdots$, i_m 与点集 U_{i_1}, U_{i_2}, $\cdots$, U_{i_m}, s. t. U_{i_k} 开于空间 X_{i_k} 中($k=1, 2, \cdots, m$)，并且

$$q\in\prod(U_{i_1},\ U_{i_2},\ \cdots,\ U_{i_m})\subset U.$$

任意取一点 $q'=\{q'_i\}$, s. t. $\forall k\in A(m)\, q'_{i_k}=q_{i_k}$, 但当 $i\neq i_k$ 时，则有 $q'_i=p_i$. 于是由于 $q'_{i_k}=q_{i_k}\in U_{i_k}$, 显而易见

$$q'\in\prod(U_{i_1},\ U_{i_2},\ \cdots,\ U_{i_m})\subset U.$$

另一方面，因为 q' 和 p 只有有限多个对应坐标不相同，所以 $q'\in C$. 由此可见，$U\cap C\neq\emptyset$. 因此从 U 是包含点 q 的任意开集这一事实推出，$q\in\overline{C}$. 但是根据系(2.5)，C 是闭集; 可见 $q\in C$. q 既然是积空间 X 的随意点，那我们就必须有 $X=C$. 这就证明了积空间 X 的连通性. ▌

例 5 显然，任何完全不连通空间的分支只是一个单元集. 任何连通空间 X 的分支只有一个，即 X.

三、度量空间的完全性、凸性与连通性

度量空间的完全性与凸性都是度量性质. 但是，如果把它们结合起来，却产生出一个拓扑性质，即连通性. 由于完全性与凸性就其本身而论也具有重要意义，所以关于它们的一些主要度量事实在本节中也将予以阐述.

1. ε-链 我们去证明凡是连通度量空间都必须具有的一个度量性质. 为此，我们首先给出下面的

(3.1) **定义** 令 p 与 q 为度量空间 (X, d) 的一对点，并且令 ε 为随意给定的一个正实数. 如果 $\exists p_k \in X (k=0, 1, 2, \cdots, n)$, s. t.

$$p_0=p,\ p_n=q \wedge d(p_{k-1}, p_k)<\varepsilon, \quad (k=1, 2, \cdots, n),$$

那末，我们就说，有限序列 $p_0, p_1, p_2, \cdots, p_n$ 是连结点 p 和点 q 的、空间 (X, d) 中的一条 ε-链.

(3.2) **定理** 如果度量空间 (X, d) 是连通的，那末，$\forall \varepsilon>0$，空间 X 的每一对点都能够用其中的一条 ε-链连结起来.

证 假定恰恰相反，$\exists \varepsilon>0$, s. t. 连通度量空间 X 的某一对点 a 与 b 不能用一条 ε-链连结起来. 能与点 a 用 X 中的一条 ε-链连结起来的 X 中所有点(包括点 a 本身在内)组成的集合，我们用 A 来表示. 令 $B=\mathscr{C}A$. 于是我们有 $a\in A$, $b\in B$, 并且

$$X=A\coprod B.$$

不难看出，点集 A 与 B 互相隔离. 实际上，如果

$$\exists p\in A\cap \overline{B}, \quad 则 \quad \exists q\in B,\ s.\ t.\ d(p, q)<\varepsilon.$$

因为 $p\in A$, 所以从 A 的定义看出，$\exists X$ 中连结点 p 到点 a 的一条 ε-链. 但是 $d(p, q)<\varepsilon$. 可见只要把点 q 加入到这一条 ε-链

就得到联结 q 到 a 的一条 ε-链．这与 $q\in B$ 这一事实矛盾．同样地，如果 $\exists p\in\overline{A}\cap B$，则因为点 $p\in\overline{A}$，所以 $\exists q\in A$, s. t. $d(p, q)<\varepsilon$，于是点 p 就能够用一条 ε-链联结到点 a．这与 $p\in B$ 这一事实矛盾．由此可见，点集 A 与 B 是互相隔离的，又

$$X=A\coprod B.$$

但依假设空间 X 是连通的．这就与命题(1.5)矛盾．】

定理(3.2)的逆理显然不真．

例 6 作为实直线 $\mathbb{R}$ 的子空间，$\mathbb{Q}$ 是不连通的，其实，它是完全不连通的．可是 $\forall\varepsilon>0$，它的每一对点都能够用一条 ε-链连结起来．

要使定理(3.2)的逆理成立，还必须另加条件，这留待以后讨论．

2．完全度量空间 从定义(1.2.2)，我们立即得到下面的命题．

(3.3) 如果度量空间 (X, d) 中的点列 $\{p_n\}$ 收敛，那末，"柯西条件"满足，即

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists N\in\mathbb{N}\ni\cdot m,\ n>N\Rightarrow d(p_n, p_m)<\varepsilon.$$

证 如果点 $p\in X$ 是点 $\{p_n\}$ 的极限，那末，

$$\forall\varepsilon>0,\quad \exists N\in\mathbb{N},$$

$$\text{s. t. } m,\ n>N\Rightarrow d(p_n, p)<\frac{\varepsilon}{2}\wedge d(p, p_m)<\frac{\varepsilon}{2}.$$

于是当 m, $n>N$ 时，有

$$d(p_n, p_m)\leqslant d(p_n, p)+d(p, p_m)<\varepsilon.\ 】$$

显然命题(3.3)的逆命题不真．

例 7 取例 4 中的度量空间 X 为例，令

$$p_n=a+\frac{1}{n}\ (n\in\mathbb{N});$$

则 X 中的点列 $\{p_n\}$ 显然满足柯西条件，但是它在空间 X 中不收敛．这是因为，点列 $\{p_n\}$ 在实直线 $\mathbb{R}$ 中的唯一的极限 a，在 X 中已不存在．

(3.4) **定义** 在任何度量空间 (X, d) 中，满足柯西条件的序列叫做柯西序列．

明显地，当 $\{p_n\}$ 是一个柯西序列时，它的每个子序列也是柯西序列．又从(3.3)看出，所有的收敛序列都是柯西序列．

(3.5) **定义** 如果度量空间 (X, d) 中的每个柯西序列都收敛，那末，(X, d) 就叫做一个完全度量空间或简称完全空间．设 $E\subset X$，$E\neq\emptyset$．如果 E 作为 (X, d) 的子空间是完全的，则 E 称为度量空间 (X, d) 的一个完全集．

我们约定：空集是每个度量空间的完全集．

例 5 很明显，任意维的欧氏空间都是完全的，特别地，实直线 $\mathbb{R}$ 是完全的．例 4 中的度量空间 X 则是不完全的．

我们再去举一个完全空间的重要例子．

(3.6) 希尔伯特空间 H^ω 是完全的．

证 令 $\{x_n\}=\{(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \cdots, x_k^{(n)}, \cdots)\}$

为 H^ω 中的一个任意柯西序列．显而易见，$\forall k\in\mathbb{N}$，

$$x_k^{(1)}, x_k^{(2)}, x_k^{(3)}, \cdots, x_k^{(n)}, \cdots$$

是实直线 $\mathbb{R}$ 中的一个柯西数列，因而收敛于 $\mathbb{R}$ 的一个点 x_k：

$$\lim_{n\to\infty} x_k^{(n)}=x_k.$$

令 $x=\{x_k\}_{1<k<+\infty}$．容易看出

$$x\in H^\omega,\ \text{而且}\ \lim_{n\to\infty} x_n=x.$$

事实上，若以 d 表示 H^ω 的度量，则因为 $\{x_n\}$ 是 H^ω 中的一个柯西序列，所以

$$\forall\varepsilon>0,\quad \exists N\in\mathbb{N}\ni\cdot m,\quad n>N\Rightarrow d(x_m, x_n)<\varepsilon.$$

于是 $\forall \nu \in \mathbb{N}$，必然有

$$\sum_{k=1}^{\nu} (x_k^{(m)} - x_k^{(n)})^2 < \varepsilon^2.$$

让 m 固定，并让 $n \to \infty$，得到

$$\sum_{k=1}^{\nu} (x_k^{(m)} - x_k)^2 \leqslant \varepsilon^2.$$

再让 $\nu \to \infty$，得到

$$\sum_{k=1}^{\infty} (x_k^{(m)} - x_k)^2 \leqslant \varepsilon^2.$$

因此无穷级数 $\sum_k (x_k^{(m)} - x_k)^2$ 收敛，所以

$$\{x_k^{(m)} - x_k\}_{k \in \mathbb{N}} \in H^\omega, \quad \text{即} \quad x_m - x \in H^\omega.$$

这证明了 $x \in H^\omega$. 因为当 m, $n > N$ 时有

$$d(x_m, x) \leqslant \varepsilon \wedge d(x_m, x_n) < \varepsilon,$$

所以当 $n > N$ 时有 $d(x_n, x) < 2\varepsilon$. 因此

$$\lim_{n \to \infty} x_n = x.$$

H^ω 的完全性于是得证. ▌

现在让我们来讨论完全空间的一般性质.

(3.7) **定理** 完全空间 X 的点集 F 是完全的 $\Leftrightarrow$ F 闭于空间 X 中.

证 $\Rightarrow$. 假定 $\exists p \in \overline{F} \ni \cdot p \notin F$. 这样一来，必定有 $p \in F'$. 在此情况下，不难看出，$\exists F$ 中的一个序列 $\{p_n\}$, s. t. 在空间 X 中

$$\lim_{n \to \infty} p_n = p.$$

因此 $\{p_n\}$ 是空间 X 的、同时也是子空间 F 的一个柯西序列. 但是根据(1.2.4)，序列 $\{p_n\}$ 在 X 中只有一个唯一的极限 p，而 $p \notin F$. 所以序列 $\{p_n\}$ 在 F 中就不能收敛. 这证明了条件是必要的.

$\Leftarrow$. 设 $\{p_n\}$ 是点集 F 中的一个随意的柯西序列；那末，

$\{p_n\}$ 也必须是完全空间 X 的一个柯西序列，因此它必须收敛于 X 的一点 p：

$$\lim_{n\to\infty} p_n = p.$$

不难看出，$p\in\overline{F}$. 因为 F 是空间 X 的闭集，所以 $p\in F$. 既然 F 中任意柯西序列 $\{p_n\}$ 在 F 中都收敛，那末，F 就必须是完全集. 因此条件也是充分的. ▌

(3.8) **定理** 如果 $(X_1, d_1), (X_2, d_2), \cdots, (X_n, d_n)$ 是完全空间的一个有限序列，并且 $(X, d)\cong\prod_{i=1}^{n}(X_i, d_i)$，其中 d 是第一章第七节的公式(I)中所定义的度量，那末，度量积 (X, d) 是一个完全空间.

证 令 $\{p^{(\nu)}\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ 为度量积 (X, d) 中的一个随意的柯西序列，其中 $\forall\nu\in\mathbb{N}$,

$$p^{(\nu)}=(p_1^{(\nu)}, p_2^{(\nu)}, \cdots, p_n^{(\nu)}), \quad p_i^{(\nu)}\in X_i (i=1, 2, \cdots, n).$$

于是

$$\forall\varepsilon>0, \quad \exists N\in\mathbb{N}\ni\cdot\mu, \quad \nu>N\Rightarrow d(p^{(\mu)}, p^{(\nu)})<\varepsilon.$$

但是 $\quad d_i(p_i^{(\mu)}, p_i^{(\nu)})\leqslant d(p^{(\mu)}, p^{(\nu)}), \quad (i=1, 2, \cdots, n),$

因此

$$\mu>N\wedge\nu>N\Rightarrow d_i(p_i^{(\mu)}, p_i^{(\nu)})<\varepsilon, \quad (i=1, 2, \cdots, n).$$

由此可见，$\forall i\in\varDelta(n)$，$\{p_i^{(\nu)}\}$ 是完全空间 (X_i, d_i) 的一个柯西序列，因而

$$\exists p_i\in X_i, \text{ s. t. } \lim_{\nu\to\infty} p_i^{(\nu)}=p_i.$$

令 $p=(p_1, p_2, \cdots, p_n)$；则 $p\in X$，并且容易看出

$$\lim_{\nu\to\infty} p^{(\nu)}=p.$$

所以度量积 (X, d) 是完全的. ▌

设在同一非空集合 X 上定义了两个度量 d 与 d', s. t. $\forall (p, q)\in X^2$,

$$\mu d'(p, q) \leqslant d(p, q) \leqslant \mu' d'(p, q), \quad 0<\mu<\mu', \tag{1}$$

那末，度量 d 与 d' 等价。如果

$$\text{当} \quad m, n \to \infty \quad \text{时}, \ d(p_n, p_m) \to 0,$$

则因为
$$d'(p_n, p_m) \leqslant \frac{1}{\mu} d(p_n, p_m),$$

所以当 $m, n \to \infty$ 时，$d'(p_n, p_m) \to 0$。

反过来，如果

$$\text{当} \quad m, n \to \infty \text{ 时}, \ d'(p_n, p_m) \to 0,$$

则因为
$$d(p_n, p_m) \leqslant \mu' d'(p_n, p_m),$$

所以当 $m, n \to \infty$ 时，$d(p_n, p_m) \to 0$。

由此可见，如果 $\{p_n\}$ 是度量空间 (X, d) 的柯西序列，则 $\{p_n\}$ 也是空间 (X, d') 的柯西序列，并且反过来也对。由于等价度量 d 与 d' 导致 X 上的同一拓扑，我们便证明了下面的定理：

(3.9) **定理** 设非空集合 X 上的等价度量 d 与 d' 满足条件(1)。那末，

$$(X, d) \text{是完全空间} \Leftrightarrow (X, d') \text{是完全空间}.$$

由(3.8)与(3.9)我们立即推出：

(3.10) **系** 如果在定理(3.8)中把 $X = \prod_{i=1}^{n} X_i$ 上的度量 d 换成第一章第七节的公式(II)及(III)中所定义的度量 d' 及 d''，则依次所得 n 个完全空间 (X_i, d_i) 的两个度量积 (X, d') 与 (X, d'') 都是完全空间。

我们现在把定理(8.8)推广到无穷可数的情形去。

(3.11) **定理** 设 $\{(X_n, d_n)\}$ 是一序列完全空间。如果积

$$X = \prod_{n=1}^{\infty} X_n$$

上取第一章第七节的公式(IV)中所定义的度量 d，则度量积 (X, d) 是一个完全空间。

证 设 $\{x^i\}_{i \in N} = \{(x_1^i, x_2^i, \cdots, x_n^i, \cdots)\}_{i \in N}$

是度量积(X, d)中的一个任意柯西序列；则不难看出，$\forall n\in\mathbb{N}$，

$$x_n^1,\ x_n^2,\ \cdots,\ x_n^k,\ \cdots$$

是完全空间(X_n, d_n)中的一个柯西序列.

实际上，$\forall \varepsilon>0$，令正实数λ如此选定，s. t.

$$0<\frac{\lambda}{1-\lambda}<\varepsilon.$$

因为$\{x^i\}$是(X, d)中的一个柯西序列，所以$\exists \mu\in\mathbb{N}$，s. t.

$$\text{当 } k, m>\mu \text{ 时，常有 } d(x^k, x^m)<a_n\lambda.$$

于是当$k, m>\mu$时，常有

$$\frac{d_n(x_n^k, x_n^m)}{1+d_n(x_n^k, x_n^m)}<\lambda,$$

因而有
$$d_n(x_n^k, x_n^m)<\frac{\lambda}{1-\lambda}<\varepsilon.$$

这证明了$\forall n\in\mathbb{N}$，$\{x_n^i\}_{i\in\mathbb{N}}$是完全空间$(X_n, d_n)$中的一个柯西序列，因此

$$\lim_{i\to\infty} x_n^i=x_n\in X_n.$$

令$x=\{x_n\}$. 我们去证明，在空间(X, d)中，柯西序列$\{x^i\}$收敛于点x：

$$\lim_{i\to\infty} x^i=x.$$

事实上，易见$\forall \varepsilon>0$，$\exists \nu_0\in\mathbb{N}$，s. t.

$$\sum_{n=\nu_0+1}^{\infty} a_n\frac{d_n(x_n^i, x_n)}{1+d_n(x_n^i, x_n)}<\frac{\varepsilon}{2},$$

其中i是一个任意的标数；同时因为$\forall n\in\mathbb{N}$

$$\lim_{i\to\infty} x_n^i=x_n,$$

所以又$\exists \nu\in\mathbb{N}$，s. t. 当$i>\nu$且$n\leqslant\nu_0$时，总有

$$d_n(x_n^i, x_n)<\frac{\varepsilon}{2s\nu_0}$$

其中$s=\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$是一个正数. 这样一来，当$i>\nu$时总有

$$d(x^i, x) < \varepsilon,$$

所以
$$\lim_{i\to\infty} x^i = x.$$

这证明了度量积(X, d)中任意的柯西序列都收敛，从而定理得证. ▌

例9 在例8中我们已经提到实直线 $\mathbb{R}$ 是一个完全空间，这是众所周知的. 至于任意维的欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 的完全性，现在已不用验证，可直接从系(3.10)看出. 从定理(3.11)还看出，弗莱歇度量空间 E_ω 也是完全的.

3. 凸空间 设(X, d)是一个任意给定的度量空间，x 与 y 是空间 X 的任意一对点. 如果空间 X 的一个点 z 满足条件

$$d(x, z) = d(z, y) = \frac{1}{2} d(x, y),$$

则点 z 叫做点 x 与点 y 的一个中点.

容易举例说明，一般说来，点 x 与点 y 的中点可以不止一个，如果它们的中点存在的话.

(3.12) **定义** 如果度量空间 X 的每一对点都有一个中点，那末，X 就叫做一个凸的度量空间，或简称为凸空间.

显而易见，度量空间的凸性是一个度量性质.

如果度量空间 X 的一个非空点集 A 作为 X 的子空间是凸的，那末，点集 A 就叫做度量空间 X 的一个凸集. 我们约定：空集是任何度量空间的凸集.

下面的两个命题是很明显的.

(3.13) 如果(X_k, d_k) $(k=1, 2, \cdots, n)$ 是凸空间的一个有限序列，并且

$$(X, d) \cong \prod_{k=1}^{n} (X_k, d_k),$$

其中 d 是第一章第七节的公式 (I)—(III) 中所定义的三个度量中

的任何一个，那末，度量积(X, d)也是凸的.

(3.14) 如果度量空间(X, d)是凸的，那末，对于每个$\varepsilon>0$，空间X的每一对点都能够用X中的一条ε-链把它们连结起来.

例 10 作为实数直线$\mathbb{R}$的子空间，$\mathbb{Q}$显然是凸的. 这是因为，$\forall(a, b)\in\mathbb{Q}^2$，令$c=\dfrac{a+b}{2}$，则$c\in\mathbb{Q}$；并且点$c$是点$a$与点$b$的中点. 我们在例6中已经指出，$\mathbb{Q}$是不连通的. 由此可见，凸空间不必连通. 又实直线$\mathbb{R}$显然也是一个凸空间.

我们再去举一个凸空间的例子.

(3.15) 希尔伯特空间H^ω是凸的.

证 令 $x=\{x_n\}\in H^\omega,\ y=\{y_n\}\in H^\omega.$

那末，由闵可夫斯基不等式立即看出

$$x+y=\{x_n+y_n\}\in H^\omega.$$

于是，若令 $z=\dfrac{1}{2}(x+y)=\left\{\dfrac{1}{2}(x_n+y_n)\right\}=\{z_n\}$，

则$z\in H^\omega$. 显然

$$d(x, z)=\left[\sum_{n=1}^{\infty}(x_n-z_n)^2\right]^{\frac{1}{2}}=\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{2}(x_n-y_n)\right]^2\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$=\left\{\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}(x_n-y_n)^2\right\}^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\left[\sum_{n=1}^{\infty}(x_n-y_n)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{1}{2}d(x, y)$$

同理 $$d(z, y)=\frac{1}{2}d(x, y),$$

所以z是点x与点y的中点. 因此H^ω是一个凸空间. ▌

我们去证明下面的重要定理:

(3.16) **定理** 如果完全空间(X, d)有一个稠密的凸集E，那末，空间X是连通的.

证 假定空间 X 不是连通的. 那末, 必然存在空间 X 的不相交的非空闭集 F 与 G, s. t.

$$X=F\coprod G.$$

因为 F 与 G 同时又是空间 X 的开集, 而且 E 在 X 中处处稠密, 所以

$$\exists \text{ 点 } x_1\in F\cap E\wedge\exists \text{ 点 } y_1\in G\cap E.$$

令 $d(x_1, y_1)=\varepsilon$. 那末, $\varepsilon>0$. 既然点集 E 是凸的, 点 x_1 与点 y_1 就必定有一个中点 $z_1\in E$. 如果 $z_1\in F$, 则令 $x_2=z_1$, $y_2=y_1$; 否则令 $x_2=x_1$, $y_2=z_1$. 但是无论如何我们总有

$$d(x_2, y_2)=\frac{1}{2}\varepsilon;\ d(x_1, x_2)=0\vee d(x_1, x_2)=\frac{1}{2}\varepsilon;$$

$$d(y_1, y_2)=0\vee d(y_1, y_2)=\frac{1}{2}\varepsilon.$$

假设对于已知整数 $n>1$, 点 $x_n\in F\cap E$ 及 $y_n\in G\cap E$ 已经确定, 使得下面的条件满足:

1° $$d(x_n, y_n)=\frac{1}{2^{n-1}}\varepsilon;$$

2° $d(x_{n-1}, x_n)=0$ 或者 $\frac{1}{2^{n-1}}\varepsilon$, $d(y_{n-1}, y_n)=0$ 或者 $\frac{1}{2^{n-1}}\varepsilon$.

如果 $z_n\in E$ 是点 x_n 和 y_n 的一个中点(由于 E 的凸性, 这样的中点总存在), 而且 $z_n\in F$, 则令 $x_{n+1}=z_n$, $y_{n+1}=y_n$, 否则令 $x_{n+1}=x_n$, $y_{n+1}=z_n$. 显而易见

$$d(x_{n+1}, y_{n+1})=\frac{1}{2^n}\varepsilon,$$

$$d(x_n, x_{n+1})=0 \text{ 或者 } \frac{1}{2^n}\varepsilon,\ d(y_n, y_{n+1})=0 \text{ 或者 } \frac{1}{2^n}\varepsilon.$$

于是由归纳法我们构作了点集 F 中的一个序列 $\{x_n\}$ 以及点集 G 中的一个序列 $\{y_n\}$, s. t. $\forall n\in\mathbb{N}$, 它们的项 x_n 与 y_n 满足条件 1°, 又 $\forall n\in\mathbb{N}$, $n>1$, 它们满足条件 2°.

从条件 2° 看出，$\{x_n\}$ 与 $\{y_n\}$ 都是柯西序列；又既然 F 与 G 都是完全空间 X 的闭集，那末它们的极限 x 与 y 必须分别属于 F 与 G. 然而从条件 1° 我们又知道

$$\lim x_n = \lim y_n,$$

即 $x=y$. 这与 F、G 两个点集不相交的假设矛盾. 因此，空间 X 必须是连通的.]

由此可见：

(3.17) **系** 如果完全空间 X 是凸的，那末，它必然是连通的.

由(3.6)、(3.15)与(3.17)立即看出：

(3.18) 希尔伯特空间 H^ω 是连通的.

四、欧氏空间的连通集·连通空间上的连续实值函数

本节的目的在于把以上各节的理论应用于特殊的度量空间——n 维欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 中去，并揭示连通集上的连续实值函数的一个有趣的性质，而由此可以看出拓扑学的力量. 在这一节里我们还要简略地提到所谓的“道路连通性”.

我们首先注意到，从例 9、例 10、命题(3.13)及(3.17)可立即推出：

(4.1) $\forall n\in\mathbb{N}$，n 维欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 是连通的；特别地，实数直线 $\mathbb{R}$ 是连通的.

下面是实数直线 $\mathbb{R}$ 的连通集的判别定理.

(4.2) **定理** 实直线 $\mathbb{R}$ 的点集 I 是连通的 $\Leftrightarrow I$ 是一个区间.

证 $\Leftarrow$. 退化区间显然都是 $\mathbb{R}$ 的连通集，因此可设 I 是一个

非退化的区间．如果 I 是一个闭区间，那么，由于 $\mathbb{R}$ 是一个完全空间，根据定理(3.7)，既然 I 闭于 $\mathbb{R}$ 中，I 也是完全的．又 I 显然也是凸的．于是根据系(3.17)，任何闭区间 I，有限或无穷，都是实直线 $\mathbb{R}$ 的连通集．

设 I 是一个随意的有限开区间：

$$I= \left]a,\ b\right[\ ,\ a<b.$$

在 I 中任取一点 c：$a<c<b$，并取 α，β，s. t. $a<\alpha<c<\beta<b$；则见

$$I=\bigcup_{\substack{a<\alpha<c\\ c<\beta<b}}[\alpha,\ \beta]\ \wedge\bigcap_{\substack{a<\alpha<c\\ c<\beta<b}}[\alpha,\ \beta]\neq\emptyset.$$

前面已证，每个这样的闭区间$[\alpha,\ \beta]$都是连通的，因此根据(1.9)，开区间 I 是 $\mathbb{R}$ 的一个连通集．同理可知，任何无限开区间也都是 $\mathbb{R}$ 的一个连通集．

如果 I 是一个随意的半开区间 $]a,\ b\ ]$：

$$I= \left]a,\ b\right]\ (\text{或}\quad I=\left[a,\ b\right[\ ),$$

则因为
$$I_0= \left]a,\ b\right[\ \subset I\subset \overline{I}_0=[a,\ b],$$

而 I_0 如前所证是连通的，所以根据(1.10)，半开区间 I 也是连通的．

这样一来，任何区间都是 $\mathbb{R}$ 的连通集．

$\Rightarrow$．设 I 是 $\mathbb{R}$ 的一个连通集，但是 I 不是一个区间．令

$$a=\inf I,\quad b=\sup I$$

(如果 I 无下界，则 $a=-\infty$；如果 I 无上界，则 $b=+\infty$)．由于 I 不是一个区间，我们有 $a<b$，并且 $\exists\lambda\in\mathbb{R}$，s. t. $a<\lambda<b$，$\lambda\notin I$．令

$$U=\{x\in I\,|\,x<\lambda\},\quad V=\{x\in I\,|\,x>\lambda\};$$

则
$$U=I\cap\ \left]-\infty,\ \lambda\right[\ ,\ V=I\cap\ \left]\lambda,\ +\infty\right[\ ,$$

并且
$$I=U\amalg V.$$

既然 $a=\inf I$，$b=\sup I$，可见 $U\neq\emptyset$，$V\neq\emptyset$．因为 U 与 V 都相

对地开于 I 中，所以 I 就应该不是连通的了．这与所设矛盾．因此 I 必须是一个区间．】

于是例 4 中提到的"所有区间都是 $\mathbb{R}$ 的连通集"这一事实，现在得到了证明．

紧接着例（一）30，我们已经定义了 n 维开长方体及 n 维超平行体．n 维开长方体的任何同胚象称为**开的 n 维胞腔**，或简称为 **n 维胞腔**；n 维超平行体的任何同胚象，即 n 维胞腔的闭包，叫做**闭的 n 维胞腔**或 **n 维盘面**（一个特殊的二维盘面已见于例（一）34 中）．

从定理(4.2)及定理(2.6)看出，任意 n 个区间的笛卡尔积都是 n 维欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 的连通集；特别地，任何 n 维开长方体以及 n 维超平行体都是 $\mathbb{R}^n$ 的连通集．于是从定理(1.13)看出，任何 n 维胞腔与 n 维盘面也都是 $\mathbb{R}^n$ 的连通集．但这并不是说，n 维胞腔和 n 维盘面或任意 n 个区间的积及其拓扑象，已经包罗了 n 维欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 的所有连通集．不是的，当 $n\geqslant 2$ 时，情况较所能想象的远为复杂．例如由不等式

$$0<r<\sqrt{x^2+y^2}<r'$$

所定义的平面 $\mathbb{R}^2$ 上的环状区域可以证明是连通的，然而它却不属于上面所列举的任何一类．关于这些的详细讨论，已经超出了这本书的范围．

从定理(4.2)及定理(1.13)，我们毫不费力地推出下面的定理，它是古典分析学中著名的"中间值定理"的推广．

(4.3) **定理** 如果 f 是连通空间 X 上的一个连续实值函数，又 p 与 q 是空间 X 的两个点，s. t.

$$f(p)=a,\quad f(q)=b,\quad a<b,$$

那末，f 在 X 上可以取到介于 a 与 b 之间的任何值，换句话说

$$\forall c,\ a<c<b,\ \exists x\in X,\ \text{s. t. } f(x)=c.$$

证 $f(X)$既然是实数直线$\mathbb{R}$的连通集，那末，$f(X)$就必须是一个区间. 但是$a\in f(X)$，$b\in f(X)$. 因此$[a, b]\subset f(X)$. 由此可见

$$\forall c\in\mathbb{R},\quad a<c<b,\quad \exists x\in X,\quad \text{s. t. } f(x)=c. \ \blacksquare$$

作为定理(4.3)的特例，我们得到下面的

(4.4) **系** 如果f是空间X的非空连通集A上的连续实值函数，又p与q是A的两个点，使得

$$f(p)<f(q),$$

那末，f在A上可以取到介于$f(p)$与$f(q)$之间的任意值.

更为特别地，我们有

(4.5) **系** 如果A是n维欧氏空间$\mathbb{R}^n$的任一非空连通集，且f是A上的连续实值函数，又$p\in A$，$q\in A$能使$f(p)<f(q)$，那末，f在A上可以取到介于$f(p)$与$f(q)$之间的任意值.

我们现在去给《数学分析》中时常遇到的所谓"区域"的概念下一个定义：

设$D\subset\mathbb{R}^n$，$D\neq\emptyset$. 如果D是n维欧氏空间$\mathbb{R}^n$的一个连通开集，那末，D就叫做$\mathbb{R}^n$中的一个区域. $\mathbb{R}^n$中任何区域D的闭包$\overline{D}$叫做$\mathbb{R}^n$中的一个闭区域①.

如果在系(4.5)中令A为任一有界闭区域，那末，我们所得到的就是古典分析中关于连续函数的一个基本性质，通常称为"中间值定理"或"介值定理". 我们看出，这一性质之所以产生的"根源"在于而且仅仅在于函数的连续性与函数定义域的连通性；"有界"、"闭"、"区域"等等要求都是多余的.

(4.6) **定义** 设E是空间X的一个非空点集，又$f: E\to E$. 如果$\exists x_0\in E$, s. t.

$$f(x_0)=x_0,$$

① 区域与闭区域的概念显然可以推广到任意的拓扑空间去.

则 x_0 称为函数 f 的一个不动点.

把(4.5)应用到一维盘面(即有界闭区间),我们得到下面的

(4.7) **不动点定理** 设 $f:[a, b]\to[a, b]$ 连续. 那末, f 有一个不动点.

证 $\forall x\in[a, b]$, 令

$$\varphi(x)=x-f(x).$$

那末, φ 显然是区间 $[a, b]$ 上的一个连续实值函数. 因为

$$\varphi(a)\leqslant 0\leqslant\varphi(b),$$

所以 $\exists x_0\in[a, b]$, s. t. $\varphi(x_0)=0$, 即 $f(x_0)=x_0$. 因此, 根据定义(4.6), f 有一个不动点 x_0. ∎

我们现在去定义"道路连通性". 古典分析中的连通性实际指的就是"道路连通性".

(4.8) **定义** 设 X 是一个拓扑空间, 又 x 与 x' 是它的两个点. 如果 $\exists r:[0, 1]\to X$, r 连续, s. t.

$$r(0)=x, \quad r(1)=x',$$

则 r 称为空间 X 中连结点 x 与 x' 的一条道路. 如果 $\forall(x, x')\in X^2$, $\exists$ 连结 x 与 x' 的一条道路, 则空间 X 叫做**道路连通的**.

(4.9) 凡是道路连通的空间 X 都是连通的.

证 这是很明显的. 事实上, 任意固定一点 $x_0\in X$; X 既然是道路连通的, 那末, $\forall x\in X$, $\exists$ 连结 x_0 与 x 的一条道路 r_x. 显然

$$X=\bigcup_{x\in X}r_x([0, 1]),$$

$$\bigcap_{x\in X}r_x([0, 1])\neq\emptyset(\text{因为 }\forall x\in X,\ x_0\in r_x([0, 1])),$$

并且每个 $r_x([0, 1])$ 都是 X 的连通集. 所以根据(1.9), X 是连通的. ∎

然而命题(4.9)的逆命题不真, 反例如下:

例 11 $\forall x>0$, 令 $f(x)=(x, y)\in\mathbb{R}^2$, 其中

$$y=\sin\frac{1}{x}.$$

那末，f 显然是区间 $]0, +\infty[$ 到 $\mathbb{R}^2$ 内的一个连续函数（可援引定理(1.5.9)和(1.6.19)）. 令

$$A=f(\ ]0, +\infty[\ );$$

于是由(4.2)及(1.13)看出，A 是 $\mathbb{R}^2$ 的连通集. 令

$$B=\{(x, y)\in\mathbb{R}^2 \mid x=0, |y|\leqslant 1\},$$

并令 $X=A\bigcup B$; 则见 $\overline{A}=X$. 因为 A 是连通的，所以 $\overline{A}$，也就是 X 是连通的. 但易知 X 不是道路连通的，因为 $\forall (0, y_0)\in B$ 及 $\forall (x, y)\in A$，不可能有 X 中的一条道路连结 $(0, y_0)$ 与 (x, y) 这两个点. 这一层可请读者补证.

(4.10) **定义** 如果拓扑空间 X 的子空间 A 是道路连通的，则 A 称为 X 的**道路连通集**.

(4.11) **定理** 任何道路连通集的连续象是一个道路连通集；特别地，如果某个空间是一个道路连通空间的连续象，则这个空间也是一个道路连通空间. 因此，道路连通性是一个拓扑性质.

证 因为子空间也是一个拓扑空间，所以不妨假定我们的道路连通集就是一个拓扑空间 X，而连续函数 f 为道路连通空间 X 到拓扑空间 Y 上的一个满函数：

$$Y=f(X).$$

于是 $\forall (y, y')\in Y^2$, $\exists (x, x')\in X^2$, s. t.

$$f(x)=y, \quad f(x')=y'.$$

因为 X 是道路连通的，所以 $\exists [0, 1]\to X$ 的一个连续函数 r, s. t.

$$r(0)=x, \quad r(1)=x'.$$

令 $r'=fr$; 则 r' 显然是 $[0, 1]$ 到空间 Y 内的一个连续函数，s. t.

$$r'(0)=fr(0)=f(x)=y,$$
$$r'(1)=fr(1)=f(x')=y'.$$

因此，r' 是 Y 中连结点 y 与 y' 的一条道路．由此可见，Y 是道路连通的．■

仿照空间的分支的定义，我们也可以定义空间 X 的"道路连通分支"．令 X 中的一个二元关系 R 定义如下：

$$xRx' \Leftrightarrow \exists X \text{ 中连结 } x \text{ 与 } x' \text{ 的一条道路}.$$

易证：R 是一个等价关系．我们称商集 X/R 中的每一个等价类为空间 X 的一个道路连通分支．易知，X 的每个道路连通分支都是 X 的极大道路连通集．

习 题

I．试证下列各命题：

1．弗莱歇度量空间 E_ω 是连通的．

2．$\forall n$，n 维欧氏空间 $\mathbf{R}^n$ 中除空集 $\emptyset$ 与 $\mathbf{R}^n$ 外，没有其他既开且闭的点集．

3．如果 C 是拓扑空间 X 的一个连通集，它包含于两个非空开集（或闭集）U 与 V 的分离并 $U\coprod V$ 中，那末，$C\subset U\vee C\subset V$．

4．如果 C 是空间 X 的一个连通集，A 为 X 的一个任意非空点集，又 $C\cap A\neq\emptyset$，$C\cap \mathscr{C}A\neq\emptyset$，那末，$C$ 必须与 A 的边界相交．

5*．令 A 为连通空间 X 的一个不含内点的点集，并令 $B=\mathscr{C}A$．如果属于 A 的每一个点 x 都有一个邻域 N_x，s. t. $N_x\cap B$ 是连通的，则 B 必然也是连通的．试举例说明，A 没有内点的假设对于结论的真实性是不可少的．

6．如果空间 X 的每一对点都包含在 X 的一个连通集中，那末，X 是一个连通空间．

7．设 A 是连通空间 X 的一个连通集．那末，

a）如果 C 是 $\mathscr{C}A$ 的任一分支，则 $\mathscr{C}C$ 是连通的；

b) 如果点集 B 既相对地开于又相对地闭于 $\mathscr{C}A$ 中，则 $A\cup B$ 是连通的；

c) 如果 C 是 $\mathscr{C}A$ 的任一分支，则 $A\cup C$ 不必是连通的。

8.* 令 C 表示空间 X 的任意非空点集，并令 $n(C)$ 表示 C 的分支的个数，$n(C)$ 可为有限或无穷。设 A 与 B 是 X 的两个非空点集，相对地闭于 $A\cup B$ 中，s. t. $A\cap B\neq\emptyset$. 那末

$$n(A\cup B)+n(A\cap B)\geqslant n(A)+n(B).$$

9. n 维欧氏空间 $\mathbf{R}^n$ 中的单位球面

$$S^{n-1}=\left\{(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)\in\mathbf{R}^n \,\middle|\, \sum_{i=1}^n x_i^2=1\right\}$$

是连通的. 又 $S^1\not\approx\mathbf{R}$.

10. n 维欧氏空间 $\mathbf{R}^n$ 是道路连通的。

11. 设 $\{X_\alpha\}_{\alpha\in I}$ 是一族拓扑空间. 那末，积空间 $\prod_{\alpha\in I}X_\alpha$ 是道路连通的 $\Leftrightarrow\forall\alpha\in I$, X_α 是道路连通空间。

II. 如果对于拓扑空间 X 的每个点 x 以及点 x 的每个邻域 N_x，总有点 x 的一个连通邻域 $V_x\subset N_x$，则空间 X 叫做局部连通的. 如果空间 X 的点集 A 作为 X 的子空间是局部连通的，则 A 称为空间 X 的局部连通集. 我们约定：空集是任何空间的局部连通集.

1. 试举例说明，局部连通空间不必是连通的；反之，连通空间也不必是局部连通的。

试证下列各命题：

2. 空间 X 是局部连通的 $\Leftrightarrow$ 空间 X 的开集的各个分支也是开集。

3. 如果空间 X 是它的闭集 A 与 B 的并集，并且 X 与 $A\cap B$ 都是局部连通的，那末，点集 A 与 B 必然也是局部连通的.

4. 局部连通集的同胚象是局部连通的，从而可知局部连通性是一个拓扑性质.

5. 令 F 为空间 X 的一个闭集，K 是 $\mathscr{C}F$ 的一族分支的并集. 如果 F 与 X 都是局部连通的，那末，$F\cup K$ 也是局部连通的.

III. 请回答下列各问题，肯定的答案给出证明，否定的给出反例：

1. 当空间 X 的点集 A 是道路连通集时，$\bar{A}$ 是否也必须是道路连通集？

2. 一个空间 X 的道路连通分支是否必须是 X 的闭集或开集？

3. n 维欧氏空间 $\mathbf{R}^n$ 的每个开球是否是道路连通的？从而断定每个 n 维胞腔是否是道路连通的.

4. 每个 n 维盘面是否是道路连通的？它的外部呢？

IV. 设 $\forall n\in\mathbb{N}$, f_n 是拓扑空间 X 到度量空间 (Y, d) 内的一个函数. 如果 $\exists f: X\to Y$, s. t. $\forall x\in X$, Y 中的点列 $\{f_n(x)\}$ 总收敛于 $f(x)$, 则我们说,**函数列** $\{f_n\}$ **在空间** X **上收敛于函数** f, 记作

$$\lim_{n\to\infty} f_n=f.$$

显然 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n=f \Leftrightarrow \forall x\in X\wedge\forall \varepsilon>0,\ \exists N(x,\ \varepsilon)\in\mathbb{N},\ \ni\cdot$

$$n>N(x,\ \varepsilon)\Rightarrow d(f_n(x),\ f(x))<\varepsilon.$$

此时数 $N(x,\ \varepsilon)$ 不但依赖于 ε 而且也依赖于点 x.

如果 $\forall\varepsilon>0,\ \exists N(\varepsilon)\in\mathbb{N}\ni\cdot$

$$x\in X\wedge n>N(\varepsilon)\Rightarrow d(f_n(x),\ f(x))<\varepsilon,$$

则我们说,**函数列** $\{f_n\}$ **在空间** X **上一致收敛于函数** f, 记作

$$\lim_{n\to\infty} f_n\equiv f \quad 或 \quad \lim f_n\equiv f$$

此时 $N(\varepsilon)$ 只依赖于 ε, 而与点 x 无关.

我们说,函数列 $\{f_n\}$ 在 X 上**一致收敛**,意即

$$\exists f: X\to Y,\quad \ni\cdot\lim f_n\equiv f.$$

求证下列各命题:

1. 空间 X 到完全空间 $(Y,\ d)$ 内的函数列 $\{f_n\}$ 一致收敛 $\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0$, $\exists N\in\mathbb{N}\ni\cdot\forall x\in X\wedge\forall m,\ n>N$, 总有

$$d(f_m(x),\ f_n(x))<\varepsilon.$$

特别地,当每个 f_n 都是实值(或复值)函数时, 这个命题也是真的.

2. 如果 $\forall n\in\mathbb{N}$, f_n 都是拓扑空间 X 到度量空间 Y 内的连续函数, 并且 $\exists f: X\to Y\ni\cdot$

$$\lim_{n\to\infty} f_n\equiv f,$$

那末, f 是连续的. 特别地,当 $Y=\mathbf{R}$ (或 $Y=\mathbb{C}$)时,这个命题也是真的.

V. 设 X 是一个拓扑空间. 令

$$F=\{f: X\to\mathbf{R}\,|\,f\text{ 有界}\},$$

又 $\forall(f,\ g)\in F^2$, 令

$$d(f, g)=\sup_{x\in X}|f(x)-g(x)|.$$

求证：

1. d 是 F 上的一个度量，因而 (F, d) 是一个度量空间.
2. 如果在度量空间 F 里序列 $\{f_n\}$ 收敛于点 f，则函数列 $\{f_n\}$ 在空间 X 上一致收敛于函数 f：
$$\lim_{n\to\infty} f_n=f.$$
3. 度量空间 F 是完全的和凸的，因而是连通的.
4. $\forall a, b\in \mathbf{R}, a<b$，令
$$F^*_{a,b}=\{f:X\to[a, b]|f\text{ 连续}\};$$
则每个 $F^*_{a,b}$ 都是空间 F 的凸闭集，因而是连通的.
5. 令 $$K=\{f\in F|f\text{连续}\};$$
则 K 是空间 F 的凸闭集，因而是连通的.
6. 如果在空间 F 中收敛于点 f 的序列 $\{f_n\}$ 的各项连续，又 $\{x_n\}$ 是在空间 X 中收敛于点 x 的一个序列，则
$$\lim_{n\to\infty} f_n(x_n)=f(x).$$

VI* 拓扑空间 X 的一个点集 A 如果是可数多个无处稠密集的并集，那末，我们就说，A 是第一种范畴的集合，或者说，A 属于第一种范畴；如果 A 不属于第一种范畴，我们就说，它属于第二种范畴，或者说，它是第二种范畴的集合. 求证下列各定理：

1. **贝尔(Baire)定理** 在一个完全空间 X 里，可数个处处稠密的开集的交集在 X 中处处稠密.
2. 完全空间 X 中任何非空完备集都是不可数的.
3. 完全空间 X 的每个非空开集都属于第二种范畴.

定义 如果度量空间 X 中点 x 的一个邻域 V_x 是空间 X 的一个完全集，则 V_x 叫做点 x 的一个**完全邻域**. 当空间 X 的每个点都有一个完全邻域时. X 就叫做一个**局部完全空间**. 如果非空点集 A 作为度量空间 X 的子空间是局部完全的，那末，A 就叫做空间 X 的一个**局部完全集**.

4. 如果 E 是处处稠密于完全空间 X 中的一个局部完全集，则在空间 X 中点集 E 属于第二种范畴.

第三章　分离公理与可数性公理

我们在这一章里，将在开集公理的基础上增加一些公理，从而使我们的拓扑空间逐渐接近于为人们所熟知的那些空间形式.

本章除了引入三个"分离公理"外，还要引入两个所谓的"可数性公理"；并引入与"第二可数性公理"密切相关的一个拓扑性质——"可分性". 最后我们将讨论与"可分性"、完全性以及与下一章的内容都有密切联系的一个度量性质——"完全有界性".

一、T_0 与 T_1 空间

1. T_0 空间　所谓 T_0 空间，就是满足下面的分离公理的拓扑空间：

柯尔莫果洛夫（Колмогоров）分离公理　对于任意一对不同的点，至少其中一点有一个邻域不包含另一点.

柯尔莫果洛夫分离公理又叫做第零分离公理.

不是 T_0 的拓扑空间可参看例(一)18.

关于 T_0 空间，我们有下面的判别准则：

(1.1)　**定理**　X 是 T_0 空间 $\Leftrightarrow \forall (p, q) \in X^2$，$p \neq q$，总有 $\overline{\{p\}} \neq \overline{\{q\}}$.

证　$\Leftarrow$. 在所设条件下，我们有

$$p \notin \overline{\{q\}} \vee q \notin \overline{\{p\}},$$

因为否则将有

$$\{p\} \subset \overline{\{q\}} \wedge \{q\} \subset \overline{\{p\}},$$

于是将有

$$\overline{\{p\}} \subset \overline{\{q\}} \wedge \overline{\{q\}} \subset \overline{\{p\}},$$

这与所设矛盾. 设 $p\notin\overline{\{q\}}$; 则 $U=\mathscr{C}\overline{\{q\}}$ 是点 p 的一个邻域, 并且 $q\notin U$. 由此可见, X 是一个 T_0 空间.

$\Rightarrow$. 设 $\exists p, q\in X, p\neq q$, s. t. $\overline{\{p\}}=\overline{\{q\}}$. 于是将有

$$p\in\overline{\{q\}}\wedge q\in\overline{\{p\}}.$$

从定理(1.4.5)看出, p 与 q 中任何一点的每一个邻域都必须包含另一点. 换句话说, 柯尔莫果洛夫的分离公理不能满足. 因此, X 不是 T_0 空间. ▌

例 1 显而易见, 任何度量空间都是 T_0 空间.

2. T_1 空间 设拓扑空间 X 满足第一分离公理, 这就是说, 满足

弗莱歇分离公理 对于任意两个不同的点, 它们中的每一个都有一个邻域不包含另一个. 那末, X 就叫做一个 T_1 空间.

显而易见, 所有的 T_1 空间都是 T_0 空间, 但反之则不然. 现在举例说明如下:

例 2. 设自然数系 $\mathbb{N}$ 上的拓扑 $\mathscr{T}_*$ 由下列元素所构成:

$\emptyset$, $\mathbb{N}$, $\{1\}$, $\{1, 2\}$, $\{1, 2, 3\}$, $\cdots$, $\{1, 2, \cdots, n\}$, $\cdots$, 其中 $n\in\mathbb{N}$. $\mathscr{T}_*$ 显然满足第一章第三节的两个开集公理, 因此 $(\mathbb{N}, \mathscr{T}_*)$ 是一个拓扑空间. 容易看出, $(\mathbb{N}, \mathscr{T}_*)$ 是一个 T_0 空间.

事实上, $\forall m, n\in\mathbb{N}, m<n$, m 数段 $A(m)$ 是点 m 的一个邻域, 它不包含点 n. 但是另一方面, 从拓扑 $\mathscr{T}_*$ 的定义看出, 点 n 的任何邻域必须包含点 m. 因此, $(\mathbb{N}, \mathscr{T}_*)$ 不是一个 T_1 空间.

关于 T_1 空间, 我们有下面的判别准则:

(1.2) **定理** 拓扑空间 X 是 T_1 空间 $\Leftrightarrow\forall p\in X$, $\{p\}$ 总是空间 X 的闭集.

证 $\Rightarrow$. 在 X 是 T_1 空间的假设下, 我们去证明: $\forall p\in X$, 总有 $\overline{\{p\}}=\{p\}$. 假定恰恰相反, $\exists p\in X$, s. t. $\overline{\{p\}}\neq\{p\}$. 那末,

因为 $\{p\}\subset\overline{\{p\}}$，所以 $\overline{\{p\}}$ 中必须有一点 $q\neq p$. 因此，$\forall$ 开集 $U\ni q$，总有

$$U\cap\{p\}\neq\emptyset,$$

也就是说，$p\in U$. 但这是不可能的，因为 X 是一个 T_1 空间. 由此可见，$\forall p\in X$，必须有 $\overline{\{p\}}=\{p\}$，因此，$\{p\}$ 是闭集.

$\Leftarrow$. 设条件满足，并设 $p,q\in X$，$p\neq q$. 因为 $\{p\}$ 是闭集，所以 $\{p\}=\overline{\{p\}}$. 因此 $\exists$ 开集 $U\ni q$, s. t. $p\notin U$. 同理，$\exists$ 开集 $V\ni p$, s. t. $q\notin V$. 由此可见，X 是一个 T_1 空间. 】

由此可见：

(1.3) **系** X 是 T_1 空间 $\Leftrightarrow X$ 的每个有限子集都是闭集.

(1.4) X 是 T_1 空间 $\Leftrightarrow\forall p\in X$，包含 p 的所有开集的交集就是单元集 $\{p\}$.

证 $\Rightarrow$. 这个交集必须包含点 p，并且这个交集不可能包含 X 的任一点 $q\neq p$；这是因为，既然 X 是 T_1 空间，那就应该有

$$\overline{\{q\}}=\{q\}.$$

$\Leftarrow$. $\forall p,\ q\in X$，$p\neq q$，令

$$\mathscr{N}_p=\{U\mid U\ni p,\ U\text{为开集}\},$$

$$\mathscr{N}_q=\{V\mid V\ni q,\ V\text{ 为开集}\};$$

则依假设 $\qquad\{p\}=\bigcap_{U\in\mathscr{N}_p}U,\quad \{q\}=\bigcap_{V\in\mathscr{N}_q}V.$

因为 $p\neq q$，所以 $\exists U\in\mathscr{N}_p$, s. t. $q\notin U$，并且 $\exists V\in\mathscr{N}_q$, s. t. $p\notin V$. 由此可见，X 是 T_1 空间. 】

(1.5) **定理** 设 A 是 T_1 空间 X 的一个点集，又 $x\in X$. 点 $x\in A'\Leftrightarrow x$ 的每个邻域都包含 $A-\{x\}$ 的无穷多个点.

证 $\Leftarrow$. 这是很明显的.

$\Rightarrow$. 令 N_x 为点 x 的一个任意邻域. 于是 $\exists$ 开集 $U\subset N_x$, s. t. $x\in U$. 因为 x 是 A 的极限点，所以 $\exists$ 一点

$$p_0\in U\cap(A-\{x\}).$$

取开集 $U^*\ni x$, s. t. $p_0\notin U^*$. 令

$$U_1=U^*\cap U;$$

则 $x\in U_1\subset U$, $p_0\notin U_1$, 又 U_1 是一个开集. 因此, 又 $\exists$ 一点

$$p_1\in U_1\cap(A-\{x\}).$$

显然 $p_1\neq p_0$, 并且 $p_0, p_1\in N_x\cap(A-\{x\})$. 由归纳构造法, 我们立即构造出空间 X 中的一个无穷点列

$$p_0, p_1, p_2, \cdots, p_n, \cdots.$$

其中任意两项都不相同, 并且 $\forall n$,

$$p_n\in N_x\cap(A-\{x\}).\ \blacksquare$$

(1.6) **定理** 如果 T_1 空间 X 有一个有限基, 则 X 是有限的.

证 设 $$\mathscr{B}=\{U_1, U_2, \cdots, U_n\}$$

是 T_1 空间 X 的一个有限基, 并设 p 为 X 的一个随意点. 于是 $\exists i\in A(n)$, s. t. $p\in U_i$. 令

$$U_{i_1}, U_{i_2}, \cdots, U_{i_k}$$

为基 $\mathscr{B}$ 中包含点 p 的所有元素; 那末, $U=\bigcap_{j=1}^{k}U_{i_j}$ 是包含点 p 的一个开集. 显然包含点 p 的任意开集必然也包含 U. 因此根据 (1.4), $U=\{p\}$. 所以 $\{p\}$ 必须是基 $\mathscr{B}$ 的某些元素的并集, 而这只有当 $\mathscr{B}$ 有一个元素就是单元集 $\{p\}$ 时才有可能. 因此, 对于 X 的每个点 p, $\mathscr{B}$ 有一个元素 $\{p\}$ 与之相应, 而对于 X 的任意两点 $p\neq q$, $\mathscr{B}$ 中总有两个元素 $\{p\}\neq\{q\}$ 与它们相应. 换句话说, X 与 $\mathscr{B}$ 的一个子集等势. 因此, X 是有限的. $\blacksquare$

由此可见:

(1.7) **系** 具有有限基的 T_1 空间必须是离散的, 从而可度量化.

证 这直接从定理(1.6)和定理(1.3.4)看出.

(1.8) **定理** T_1空间X的任何点集A的导集A'是闭集[①].

证 我们只须证明A的导集A'的导集$A''\subset A'$. 实际上

$$\forall q\in A''\wedge\forall \text{ 开集 } U\ni q,$$

由于q是A'的聚点, $\exists p\in U\cap A'$. 因为p是A的一个聚点, 而且$p\in U$, 所以根据定理(1.5), $\exists x\in U\cap A$, s. t. $x\neq q$. 又因为包含点q的每个开集U总包含A中异于q的一个点x, 所以q是A的一个聚点; 换句话说, $q\in A'$. 这样, 我们就证明了$A''\subset A'$. 根据定理(1.4.9), 定理得证. ▌

例3 每个度量空间(X, d)显然都是T_1空间. 实际上

$$\forall p,\ q\in X,\ p\neq q,$$

取$\varepsilon>0$, s. t. $\varepsilon\leqslant d(p, q)$; 则见$p\notin B(q, \varepsilon)$, $q\notin B(p, \varepsilon)$. 特别地, 任意维的欧氏空间$\mathbb{R}^n$都是$T_1$空间. 这就是为什么象定理(1.2)、(1.5)和(1.8)等为人们所熟知的事实出现于《实变函数论》中的缘故.

二、T_2空间

1. 豪斯道夫(Hausdorff)空间 我们称满足下列分离公理的拓扑空间X为豪斯道夫空间或T_2空间:

豪斯道夫分离公理 $\forall p,\ q\in X,\ p\neq q,\ \exists p$的一个邻域$N_p$及$q$的一个邻域$N_q$, s. t. $N_p\cap N_q=\emptyset$.

豪斯道夫分离公理又叫做第二分离公理.

---

① 这个定理初见于 W. Sierpiński, Introduction to General Topology (C. C. Krieger 英译本, 1934, 波兰文原版, 1928), p. 29. 后来杨忠道 (C. T. Yang) 曾作如下推广:

空间X的任意点集的导集是闭集$\Leftrightarrow\forall x\in X$, $\{x\}'$是闭集;

参看 J. L. Kelly, General Topology, 1955, pp. 56—57.

任一豪斯道夫空间显然也是T_1空间，因此也就必须是T_0空间．但是反过来，T_1空间则并不一定也是豪斯道夫空间．现在举例说明如下：

例 4 我们定义自然数系$\mathbb{N}$上的拓扑$\mathscr{T}^*$如下：

1° $\emptyset\in\mathscr{T}^*$；

2° 设$U\subset\mathbb{N}$, $U\neq\emptyset$. $U\in\mathscr{T}^*\Leftrightarrow\mathscr{C}U$是$\mathbb{N}$的有限子集．

容易看出，$\mathscr{T}^*$的确是$\mathbb{N}$上的一个拓扑(由条件2°看出，$\mathbb{N}\in\mathscr{T}^*$)，于是得到一个拓扑空间$(\mathbb{N}, \mathscr{T}^*)$．

$\forall n_0\in\mathbb{N}$，由于点集$\mathscr{C}\{n_0\}$开于空间$(\mathbb{N}, \mathscr{T}^*)$中，因而每个单元集$\{n_0\}$都是空间$(\mathbb{N}, \mathscr{T}^*)$的闭集，于是从定理(1.2)看出，$(\mathbb{N}, \mathscr{T}^*)$是一个$T_1$空间．

另一方面，$\forall m, n\in\mathbb{N}$, $m\neq n$，我们却找不到它们的不相交的邻域．为了证明这个，我们只须证明：在空间$(\mathbb{N}, \mathscr{T}^*)$中，任意的两个非空开集$U$、$V$总相交．

事实上，根据定义拓扑$\mathscr{T}^*$的条件2°，既然

$$U\neq\emptyset,\quad V\neq\emptyset,\quad U\in\mathscr{T}^*,\quad V\in\mathscr{T}^*,$$

那末，就必然$\exists n_1, n_2\in\mathbb{N}$, s. t. $n\geqslant n_1\Rightarrow n\in U\wedge n\geqslant n_2\Rightarrow n\in V$.

令
$$n_0=\max(n_1, n_0).$$
于是
$$n\geqslant n_0\Rightarrow n\in U\cap V.$$
所以$U\cap V\neq\emptyset$．由此可见，$(\mathbb{N}, \mathscr{T}^*)$不是一个豪斯道夫空间．∎

顺带指出，在例4中我们所构作的拓扑空间$(\mathbb{N}, \mathscr{T}^*)$显然是连通的．

2．豪斯道夫空间的性质 我们首先去证明豪斯道夫空间的一个判别准则：

(2.1) **定理** X是豪斯道夫空间$\Leftrightarrow\forall p, q\in X$, $p\neq q$, $\exists$开集$U\ni p$, s. t. $q\notin\overline{U}$.

证 $\Rightarrow$. X 既然是豪斯道夫空间，又它的点 $p\neq q$，那末，必然 $\exists$ 开集 U、V，s. t.

$$p\in U,\quad q\in V,\quad U\cap V=\emptyset.$$

于是，$U\subset\mathscr{C}V$，而 $\mathscr{C}V$ 闭于 X 中. 因此

$$\overline{U}\subset\mathscr{C}V;$$

但 $q\in V$，所以 $q\notin\overline{U}$.

$\Leftarrow$. $\forall p,\ q\in X,\ p\neq q$，依假设，$\exists$ 开集 $U\ni p$，s. t.

$$q\notin\overline{U}.\quad 令\ V=\mathscr{C}\overline{U};$$

则 V 是空间 X 的开集，并且 $q\in V$，$U\cap V=\emptyset$. 由于 U、V 分别是 X 中任意两个相异点 p、q 的邻域，因此 X 是一个豪斯道夫空间. 】

(2.2) 豪斯道夫空间 X 的任何子空间 A 都是豪斯道夫空间.

证 设 $x,\ y\in A,\ x\neq y$. 因为 X 是一个豪斯道夫空间，所以 $\exists x$ 的一个邻域 N_x 及 y 的一个邻域 N_y，s. t. $N_x\cap N_y=\emptyset$. 显然

$$N_x\cap A\quad 与\quad N_y\cap A$$

分别是点 x 与点 y 在子空间 A 中的邻域，并且

$$(N_x\cap A)\cap(N_y\cap A)=N_x\cap N_y\cap A=\emptyset.$$

所以子空间 A 是一个豪斯道夫空间. 】

(2.3) 任意一族豪斯道夫空间 $\{X_\iota\}_{\iota\in I}$ 的积空间

$$X=\prod_{\iota\in I}X_\iota$$

是一个豪斯道夫空间.

证 令 $\quad x=\{x_\iota\}_{\iota\in I}\in X,\quad y=\{y_\iota\}_{\iota\in I}\in X,$

并且假定 $x\neq y$. 于是 $\exists\iota_0\in I$，s. t. $x_{\iota_0}\neq y_{\iota_0}$. 因为 X_{ι_0} 是一个豪斯道夫空间，所以在空间 X_{ι_0} 中 $\exists x_{\iota_0}$ 的一个邻域 V_0 及 y_{ι_0} 的一个邻域 U_0，s. t.

$$V_0\cap U_0=\emptyset.$$

既然 i_0 坐标函数 p_{i_0} 是连续的，可见 $p_{i_0}^{-1}(V_0)$ 与 $p_{i_0}^{-1}(U_0)$ 分别是积空间 X 中点 x 与点 y 的邻域．但是

$$p_{i_0}^{-1}(V_0)\cap p_{i_0}^{-1}(U_0)=p_{i_0}^{-1}(V_0\cap U_0)=\emptyset.$$

所以积空间 X 也是一个豪斯道夫空间．】

下面的定理的证明虽然很简单，但却具有重要的意义，因为它说明，在古典分析学中收敛序列之所以极限是唯一的，其原因就在于欧氏空间是豪斯道夫空间．

(2.4) **定理** 在任何豪斯道夫空间 X 里，每个收敛序列 $\{a_n\}$ 都只有唯一的一个极限．

证 如果收敛序列 $\{a_n\}$ 在空间 X 中有两个不同的极限 a 及 a'，那末，因为 X 是一个豪斯道夫空间，所以 ∃ 点 a 的一个邻域 N_a 及点 a' 的一个邻域 $N_{a'}$，s. t.

$$N_a\cap N_{a'}=\emptyset.$$

既然点 a 是序列 $\{a_n\}$ 的极限，那末它的邻域 N_a 就应该包含几乎所有的项 a_n，于是，由于

$$N_{a'}\cap N_a=\emptyset,$$

$N_{a'}$ 最多就只能包含有限多个项 a_n，这与 a' 也是序列 $\{a_n\}$ 的极限这一假设相矛盾．】

(2.5) **定理** 设点集 A 在拓扑空间 X 中处处稠密，又 f 是 A 到一个豪斯道夫空间 Y 内的函数．如果 f 有一个在 X 上的连续开拓 g，那末开拓 g 是唯一的．

证 设 g 与 h 是 f 在 X 上的两个连续开拓．令

$$C=\{x\in X\,|\,g(x)=h(x)\}$$

显然 $A\subset C$．我们只须证明 C 是空间 X 的闭集，则由 A 在 X 中的稠密性立即推出 $X=\overline{A}\subset\overline{C}=C\subset X$，从而有 $C=X$，于是定理得证．

为了证明 C 是 X 的闭集，只须证明 $\mathscr{C}C$，亦即 $X-C$ 是 X

的开集. 但是

$$\mathscr{C}C=\{x\in X\mid g(x)\neq h(x)\}.$$

因此 $\forall x\in\mathscr{C}C$, 必有 $g(x)\neq h(x)$. 因为 Y 是一个豪斯道夫空间, 所以在空间 Y 中 $\exists g(x)$的一个开邻域 G 及 $h(x)$的一个开邻域 H, s. t.

$$G\cap H=\emptyset.$$

既然 g 与 h 在点 x 处都连续, 可见

$$U_1=g^{-1}(G) \quad 与 \quad U_2=h^{-1}(H)$$

都是 X 中点 x 的开邻域, 从而 $U_x=U_1\cap U_2$ 也是 X 中点 x 的一个开邻域. 现在任取一点 $x'\in U_x$, 则见

$$g(x')\in G\wedge h(x')\in H.$$

因为 $G\cap H=\emptyset$, 所以 $g(x')\neq h(x')$. 这证明了 $x'\in\mathscr{C}C$, 于是 $U_x\subset\mathscr{C}C$. 因此由定理(1.4.13)推出, $\mathscr{C}C$ 是空间 X 的开集. ▌

特别地, 定理(2.5)当 $Y=\mathbb{R}$ 时当然成立. 因此得到

(2.6) **系** 设点集 A 在拓扑空间 X 中处处稠密, 又 f 是 A 上的一个实值函数. 如果 f 有一个在 X 上的连续开拓 g, 那末, 开拓 g 是唯一的.

不言而喻, 由于所有的 T_2 空间同时也是 T_0 与 T_1 空间, 第一节中的所有命题对于 T_2 空间(即豪斯道夫空间)也全都真实.

例 5 上面我们已经指出, 欧氏空间是 T_2 空间. 一般说来, 任何度量空间(X, d)都是 T_2 空间. 事实上, $\forall p, q\in X, p\neq q$, 若取 $\varepsilon=d(p, q)$, 则 $\varepsilon>0$. 显而易见

$$B\left(p, \frac{\varepsilon}{2}\right)\cap B\left(q, \frac{\varepsilon}{2}\right)=\emptyset.$$

因此, (X, d)是一个豪斯道夫空间. 因此这一节与前一节的所有定理当把 $T_i(i=0, 1或2)$空间换成度量空间时, 全都是真实的. 特别地, 系(2.6)中的"实值函数"显然可以改写成"复值函数"而不致改变命题的真实性.

三、第一可数性公理

众所周知，在《函数论》中，函数的连续性与点集的聚点都可以用收敛点列来定义。这说明了一个重要事实，即欧氏空间的拓扑由点列的收敛性完全决定。而对这些性质起保证作用的，就是在这一节里要引入的"第一可数性公理"。

为了表述"第一可数性公理"，必须先引入"拓扑在一点处的基"的概念。

(3.1) **定义** 令 x 为拓扑空间 $(X, \mathscr{T})$ 的一个点，又 $\{W_\alpha\}_{\alpha\in I}$ 是空间 $(X, \mathscr{T})$ 中点 x 的一族开邻域。如果

$$\forall U\in\mathscr{T},\quad U\ni x,\quad \exists\alpha\in I,\quad \text{s.t. } W_\alpha\subset U,$$

那末，$\{W_\alpha\}_{\alpha\in I}$ 就叫做拓扑 $\mathscr{T}$ 或空间 $(X, \mathscr{T})$ 在点 x 处的一个基。

第一可数性公理可表述如下：

第一可数性公理 在每一点处都有一个可数基。

下面举几个满足第一可数性公理的拓扑空间的例子。

例 6 任何度量空间 (X, d) 都满足第一可数性公理。这是因为，$\forall x\in X$，$\left\{B\left(x, \frac{1}{n}\right)\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ 显然是空间 X 在点 x 处的一个可数基。特别地，$\forall n\in\mathbb{N}$，n 维欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 满足第一可数性公理。

除度量空间外，也有不可度量化的拓扑空间满足第一可数性公理的。

例 7 在例 4 中定义的拓扑空间 $(\mathbb{N}, \mathscr{T}^*)$ 就是一个不可度量化的拓扑空间，因为它不是一个 T_2 空间。但是不难看出，拓扑 $\mathscr{T}^*$ 本身就是一个可数集。因此，空间 $(\mathbb{N}, \mathscr{T}^*)$ 必须满足第一可

数性公理.

一般说来,任何拓扑空间$(X, \mathscr{T})$只要是有限的或拓扑$\mathscr{T}$是可数的,当然都满足第一可数性公理.

让我们来举一个不满足第一可数性公理的拓扑空间的例子.

例8 令$I=[0, 1]$, 又$\forall \alpha\in[0, 1]$, 令$X_\alpha=\mathbb{R}$, 于此$\mathbb{R}$为实数直线. 不难看出,积空间$\mathbb{R}^I=\prod_{\alpha\in I} X_\alpha$不满足第一可数性公理.

事实上,如果点$x=\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}\in\mathbb{R}^I$, 并且$\{V_n\}$是点$x$的任一可数开邻域族,则由(1.6.14)看出,我们不妨设

$$V_n=\prod(J^{(n)}_{\alpha_1^{(n)}}, J^{(n)}_{\alpha_2^{(n)}}, \cdots, J^{(n)}_{\alpha_m^{(n)}}),$$

其中$J^{(n)}_{\alpha_k^{(n)}}(k=1, 2, \cdots, m)$是有限开区间, 并且$\alpha_k^{(n)}\in I$. 由于所有的$\alpha_k^{(n)}$所成的集合是可数的,而$I$是一个不可数集,因而$\exists\alpha_0\in I$, s. t. $\alpha_0\neq\forall\alpha_k^{(n)}$. 于是$\forall n$, 部分积$V_n$的$\alpha_0$因子必须是$X_{\alpha_0}=\mathbb{R}$. 如果在某个$V_n$中把它的$\alpha_0$因子$\mathbb{R}$换成包含$x_{\alpha_0}$($x_{\alpha_0}$是点$x$的$\alpha_0$坐标)的任意选定的有限开区间$J^{(n)}_{\alpha_0}$, 而其余各因子不变, 并将这样得到的部分积用$V$来表示, 则我们立即看出$V$是积空间$\mathbb{R}^I$中包含点$x$的一个开集,但是$\forall n$, $V_n\not\subset V$. 这证明了点x的开邻域的任何可数族都不是空间$\mathbb{R}^I$在点x处的一个基, 所以空间$\mathbb{R}^I$不满足第一可数性公理.

下面的命题很明显地是真实的.

(3.2) 如果空间X满足第一可数性公理,那末,它的任何子空间A也满足第一可数性公理.

证 设x是A的任意一点,并设$\{W_n\}$是空间X在点x处的一个可数基. 那末,$\{A\cap W_n\}$显然是子空间A在点x处的一个可数基. ▌

(3.3) 任意n个满足第一可数性公理的拓扑空间X_1, X_2, $\cdots$, X_n的积空间.

$$X=\prod_{k=1}^{n}X_k$$

也满足第一可数性公理.

证 设 $x=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 是积空间 X 的任意给定的一个点. $\forall k\in\Delta(n)$, 因为 X_k 满足第一可数性公理, 所以 $\exists$ 空间 X_k 在点 x_k 处的一个可数基 $\{W_{m_k}^{(k)}\}_{m_k\in I_k}$, 其中 I_k 为自然数段或自然数系. 显然

$$\{W_{m_1}^{(1)}\times W_{m_2}^{(2)}\times\cdots\times W_{m_n}^{(n)}\}$$

是积空间 X 在点 x 处的一个基, 于此 $(m_1, m_2, \cdots, m_n)$ 跑遍积

$$I_1\times I_2\times\cdots\times I_n.$$

由于 $\forall k$, I_k 是可数的, 可见

$$I_1\times I_2\times\cdots\times I_n$$

是一个可数集. 这就证明了积空间 X 满足第一可数性公理. ▮

我们还可以把命题(3.3)推广到无穷可数的情形去.

(3.4) 如果 $\{X_n\}$ 是一序列满足第一可数公理的拓扑空间, 则积空间

$$X=\prod_{n=1}^{\infty}X_n$$

也满足第一可数性公理.

证 设 $x=\{x_n\}$ 是空间 X 的任意点, 并设 $\{W_k^{(n)}\}_{k\in I_n}$ 是空间 X_n 在点 x_n 处的一个可数基, 于此, n 是任意给定的一个自然数, I_n 为自然数段或自然数系. 于是

$$\{\prod(W_{k_1}^{(n_1)}, W_{k_2}^{(n_2)}, \cdots, W_{k_m}^{(n_m)})\}$$

显然是空间 X 在点 x 处的一个基, 于此, $(n_1, n_2, \cdots, n_m)$ 为自然数所成的严格递增有限序列, 而 $(k_1, k_2, \cdots, k_m)$ 为自然数的一个有限序列, 不必严格递增, 且 $\forall i\in\Delta(m)$, $k_i\in I_{n_i}$. 因此, 由预篇第七节第3款所论立即看出, 族

$$\{\prod(W_{k_1}^{(n_1)}, W_{k_2}^{(n_2)}, \cdots, W_{k_m}^{(n_m)})\}$$

是可数的. ▮

从例 8 看出，我们不能把命题(3.4)进一步推广到不可数的情形去.

下面的定理虽然简单，但是却很有用处.

(3.5) **定理** 如果空间 X 满足第一可数性公理，那末，在 X 的各点处总存在可数基 $\{W_n\}$ 适合条件

$$W_{n+1}\subset W_n \quad (n=1, 2, 3, \cdots).$$

证 设 $\{V_n\}$ 是空间 X 在它的任意点 x 处的一个可数基. 令 $W_1=V_1$, 又 $\forall n>1$, 令

$$W_n=V_1\cap V_2\cap\cdots\cap V_n.$$

显然每个 W_n 都是点 x 的一个开邻域，而且 $\forall n$, $W_{n+1}\subset W_n$. 设 U 是包含点 x 的任意开集；则必 $\exists m\in\mathbb{N}$, s. t. $V_m\subset U$. 于是显然有 $W_m\subset U$. 所以 $\{W_n\}$ 是 X 在点 x 处适合所给条件的一个可数基. ▌

下面的定理说明，在满足第一可数性公理的 T_1 空间里，点集的聚点可以用收敛序列的极限来定义.

(3.6) **定理** 设 X 是满足第一可数性公理的 T_1 空间，并设 A 是空间 X 的一个点集. 那末，$x\in A'\Leftrightarrow\exists A$ 中的一个各项两两相异并收敛于点 x 的序列，而且这个序列也没有一项等于 x.

证 条件显然是充分的，而且也不要求空间 X 适合第一分离公理与第一可数性公理，甚至也不要求序列没有一项等于 x.

反之，设 $x\in A'$. 空间 X 既然满足第一可数性公理，根据定理(3.5)，在点 x 处就必须有一个可数基 $\{W_n\}$, s. t. $\forall n$, $W_{n+1}\subset W_n$. 因为点 x 是集合 A 的一个聚点，又 W_1 是点 x 的一个开邻域，所以 $\exists$ 一点 $x_0\in W_1\cap A$, s. t. $x_0\neq x$. 令 $n_0=1$, 即令 $W_{n_0}=W_1$. 设 $m\in\mathbb{N}$, 假定对于任意的非负整数 $k<m$, 我们已经定义了 A 中的点 x_k 以及 $\{W_n\}$ 中的集合 W_{n_k}, s. t. 下面的条件满足：

$$x_k\neq x,\quad x_k\in W_{n_k},$$

并且只要是小于 m 的非负整数 $i\neq k$，总有 $x_i\neq x_k$. 既然 X 是 T_1 空间，而且 $x\neq x_k$，那末，就应该 $\exists x$ 的一个开邻域 U_m, s. t. $\forall$ 非负整数 $k<m$，总有 $x_k\notin U_m$. 因为 $\{W_n\}$ 是空间 X 在点 x 处的一个基，所以 $\exists n_m\in\mathbb{N}$, s. t. $x\in W_{n_m}\subset U_m$. n_m 必须大于 n_k，否则 W_{n_m} 就会包含 x_k. 因为 x 是 A 的聚点，又 W_{n_m} 是包含 x 的开集，所以 W_{n_m} 必然含有 A 中异于 x 的一点 x_m. 显然对于任意的非负整数 $k<m$ 总有 $x_k\neq x_m$. 于是用归纳构造法，我们就定义了 A 中的一个点列 $\{x_n\}_{0<n<+\infty}$ 与族 $\{W_n\}$ 的一个子族 $\{W_{n_k}\}_{0<k<+\infty}$，其中 $\{n_k\}$ 是正整数的一个严格递增序列，又对于任意的非负整数 $m\neq n$，总有 $x_m\neq x_n$, $x_m\neq x$, $x_m\in W_{n_m}$. 此外，很明显

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x. \quad ▌$$

下面的定理表明，当函数的定义域是一个满足第一可数性公理的拓扑空间时，函数的连续性可以用序列的收敛性来定义.

(3.7) **定理** 设 X 是一个满足第一可数性公理的拓扑空间，又 Y 是一个随意的拓扑空间，并设 $f:X\to Y$. f 是连续的 $\Leftrightarrow\forall x\in X\wedge\forall X$ 中的序列 $\{x_n\}$, s. t.

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x,$$

总有

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x). \qquad (*)$$

证 条件的必要性很明显，并且不必要求空间 X 满足第一可数性公理. 事实上，如果 f 是连续的，并且 U 是 $f(x)$ 的任意邻域，则 $f^{-1}(U)$ 是 x 的一个邻域. 因为

$$\lim x_n = x,$$

所以 $\exists n_0\in\mathbb{N}$, s. t.

$$n \geqslant n_0 \Rightarrow x_n \in f^{-1}(U).$$

因此 $$n \geqslant n_0 \Rightarrow f(x_n) \in U.$$

换言之，(*)成立.

反之，假定条件满足而 f 不连续. 于是

$$\exists x \in X \wedge \text{在} Y \text{中} \exists f(x) \text{的一个邻域} U,$$

s. t. 点 x 不是 $f^{-1}(U)$ 的一个内点. 因为 X 满足第一可数性公理，所以 $\exists$ 空间 X 在点 x 处的一个可数基 $\{W_n\}$，s. t. $W_{n+1} \subset W_n$. 显然

$$\forall n,\ W_n \not\subset f^{-1}(U).$$

因此 $$\forall n,\ \exists x_n \in W_n,\ \text{s. t. } x_n \notin f^{-1}(U).$$

很明显，$\{x_n\}$ 是 X 中收敛于点 x 的一个序列. 既然

$$\forall n,\ f(x_n) \notin U,$$

可见序列 $\{f(x_n)\}$ 不收敛于 $f(x)$. 这与所设矛盾. 因此，条件也是充分的. ▌

由定理(3.7)立即推出下面的

(3.8) **系** 满足第一可数性公理的空间的拓扑完全由序列的收敛性所决定.

这个重要的结果可以重述如下：

令 $\mathscr{T}_1$ 与 $\mathscr{T}_2$ 是两个在同一非空集合 X 上的拓扑. 设空间 $(X, \mathscr{T}_1)$ 与 $(X, \mathscr{T}_2)$ 都满足第一可数性公理. 那末，$\mathscr{T}_1 = \mathscr{T}_2 \Leftrightarrow$ X 中的任一序列如果在两个空间 $(X, \mathscr{T}_1)$ 与 $(X, \mathscr{T}_2)$ 中的一个里面收敛，则必须在其他的一个里面也收敛，并且极限相同.

证 $\Rightarrow$. 这是很明显的.

$\Leftarrow$. 设条件满足. 试看 X 到它自身上的恒等函数 e. 从定理(3.7)立即看出，e 是空间 $(X, \mathscr{T}_1)$ 到空间 $(X, \mathscr{T}_2)$ 上的同胚. 因此. $\mathscr{T}_1 = \mathscr{T}_2$. ▌

四、第二可数性公理·可分空间

为了对一个拓扑空间 $(X, \mathscr{T})$ 的基直接加以个数方面的限制，我们需要下面的

第二可数性公理 拓扑空间$(X, \mathscr{T})$(或者完全一样，它的拓扑 $\mathscr{T}$)有一个可数基.

显而易见：

(4.1) 每个满足第二可数性公理的拓扑空间必然也满足第一可数性公理.

由此可见，例 8 中的空间 $\mathbb{R}^l$ 必然不满足第二可数性公理，因为它连第一可数性公理也不满足.

下面的三个命题分别与命题(3.2)、(3.3)及(3.4)相当.

(4.2) 如果空间 X 满足第二可数性公理，那末，它的任何子空间 A 也满足第二可数性公理.

证 这是因为，如果 $\{W_n\}$ 是空间 X 的可数基，那末，$\{A\cap W_n\}$ 是子空间 A 的可数基. 】

(4.3) 任意 n 个满足第二可数性公理的拓扑空间 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 的积空间

$$X=\prod_{k=1}^{n} X_k$$

也满足第二可数性公理.

证 这是因为，如果 $\{W_{m_k}^{(k)}\}_{m_k\in I_k}$ 是空间 X_k 的可数基，则

$$\{W_{m_1}^{(1)}\times W_{m_2}^{(2)}\times\cdots\times W_{m_n}^{(n)}\}$$

显然是空间 X 的可数基. 】

(4.4) 如果 $\{X_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 是一序列满足第二可数性公理的拓扑空间，则积空间 $X=\prod_{i=1}^{\infty} X_i$ 也满足第二可数性公理.

证 $\forall m\in\mathbb{N}$，设 $\{V_{m,n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是空间 X_m 的一个可数基. 任取

一个自然数的有限序列 $(n_1, n_2, \cdots, n_r)$，令

$$W(n_1, n_2, \cdots, n_r)=\prod(V_{1,n_1}; V_{2,n_2}; \cdots; V_{r,n_r}),$$

则显然 $W(n_1, n_2, \cdots, n_r)$ 是积空间 X 的开集. 我们去证明，所有这些开集组成空间 X 的一个基 $\mathscr{B}$. 事实上，令 U 为 X 的任一非空开集，并令 $x=\{x_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ 为 U 中的任意点；则可得有限个坐标空间 X_{m_i} 以及其中的开集 $V_{m_i}(i=1, 2, \cdots, k)$, s. t.

$$x\in\prod(V_{m_1}, V_{m_2}, \cdots, V_{m_k})\subset U,$$

其中自然数 m_i 满足条件 $m_1<m_2<\cdots<m_k$. 因为

$$x_{m_i}\in V_{m_i}\subset X_{m_i},$$

所以 ∃ 自然数 n_{m_i}, s. t.

$$x_{m_i}\in V_{m_i,n_{m_i}}\subset V_{m_i}.$$

令 $r=m_k$；则 $m_1, m_2, \cdots, m_k$ 必然都属于 $A(r)$. 如果自然数 $s\in A(r)$，但 $s\neq\forall m_i$, 则可取标数 n_s, s. t. $x_s\in V_{s,n_s}$. 令

$$V_x=\prod(V_{1,n_1}; V_{2,n_2}; \cdots; V_{r,n_r})=W(n_1, n_2, \cdots, n_r),$$

则 V_x 开于 X 中，并且 $x\in V_x\subset U$. 由此可见，$\mathscr{B}$ 是空间 X 的一个基. 由于可数集中一切有限序列所成的集合是可数的，因此 $\mathscr{B}$ 是可数的. 】

让我们来举几个满足第二可数性公理的拓扑空间的例子.

例 9 实直线 $\mathbb{R}$ 满足第二可数性公理. 事实上，用 V_n 表示两个端点都是有理数的有限开区间，则见 $\{V_n\}$ 是 $\mathbb{R}$ 的一个可数基. 于是由(4.3)推出，$\forall n\in\mathbb{N}$, n 维欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 满足第二可数性公理. 再由(4.4)推出，积空间 $\mathbb{R}^\infty$ 满足第二可数性公理. 由于弗莱歇度量空间 E_ω 是 $\mathbb{R}$ 的无穷可数多次的度量积，因此，E_ω 满足第二可数性公理.

与前一节的情形不同，并不是每个度量空间都满足第二可数性公理.

例 10 显然离散度量空间 $(\mathbb{R}, d_0)$ 不满足第二可数性公理.

以后我们要一再地用到"覆盖"这个概念. 就这个概念本身而论,它实际上是与拓扑无关的.

(4.5) **定义** 令 X 表示一个随意的非空集合,又 E 表示 X 的一个子集. 如果 X 的一族子集 $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ 能使 $E\subset\bigcup_{\alpha\in I}U_\alpha$, 则 $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ 叫做集合 E 的一个**覆盖**. 当 $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ 是 E 的一个覆盖时,我们又说, E 被所有的 U_α 所覆盖,或者说,所有的 U_α 覆盖着 E. 令

$$\mathscr{U}=\{U_\alpha\}_{\alpha\in I},\ \text{并令}\ \mathscr{V}=\{U_\alpha\}_{\alpha\in I^*}\ \text{其中}\ I^*\subset I.$$

如此,我们称族 $\mathscr{V}$ 为族 $\mathscr{U}$ 的**子族**,并且可以象集合的被包含那样写成 $\mathscr{V}\subset\mathscr{U}$ 或者 $\mathscr{U}\supset\mathscr{V}$. 当集 E 的一个覆盖 $\mathscr{U}$ 的某个子族 $\mathscr{V}$ 也是 E 的一个覆盖时,我们称 $\mathscr{V}$ 为 $\mathscr{U}$ 的一个**子覆盖**. 当 E 的覆盖 $\mathscr{U}$ 是有限族、无穷族、可数族或不可数族时,则 $\mathscr{U}$ 分别叫做 E 的**有限、无穷、可数或不可数覆盖**. 如果 X 是一个拓扑空间,又若 X 的一个开集族 $\mathscr{U}=\{U_\alpha\}$ 是它的一个点集 E 的覆盖,则 $\mathscr{U}$ 叫做 E 的一个**开覆盖**; 如果 $\forall\alpha$, U_α 是闭集, 则 $\mathscr{U}$ 称为 E 的一个**闭覆盖**.

关于满足第二可数性公理的拓扑空间, 我们有下面重要的覆盖定理.

(4.6) **林德略夫(Lindelöf)定理** 如果拓扑空间 X 满足第二可数性公理, 则空间 X 的任何开覆盖 $\mathscr{U}=\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ 都有一个可数子覆盖.

证 设 $\{V_n\}$ 是空间的一个可数基. 那末, 显然至少有一个 V_n 包含在至少一个 U_α 中. 令 $(V_{i_1}, V_{i_2}, \cdots, V_{i_n}, \cdots)$ 是 $\{V_n\}$ 的一个子族,其中每个 V_{i_n} 都包含在族 $\{U_\alpha\}$ 中的一个 U_{α_n} 中,但是,如果 $k\neq\forall i_n$, 则 V_k 不包含于任一 U_α. 不难断定:

$$X=\bigcup_{n=1}^{\infty}U_{\alpha_n}.$$

事实上,如果 x 是空间 X 的任意点, 则必有 $\alpha\in I$, s. t. $x\in U_\alpha$. 因

为 $\{V_n\}$ 是空间 X 的基，所以 $\exists V_k$, s. t. $x\in V_k\subset U_\alpha$. 因此，$\exists r\in\mathbb{N}$, s. t. $k=i_r$. 于是 $x\in V_{i_r}\subset U_{\alpha_r}$，从而 $x\in\bigcup_n U_{\alpha_n}$. 这证明了 $\{U_{\alpha_n}\}$ 是空间 X 的一个覆盖，而且它是可数的. ▌

(4.7) **定理** 如果空间 X 满足第二可数性公理，又 $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ 是 X 的一个基，则从 $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ 中我们可以取出空间 X 的一个可数基.

证 设 $\{V_n\}$ 是空间 X 的一个可数基. 于是因为每个 V_n 都是开集，而且 $\{U_\alpha\}$ 又是 X 的一个基，所以 $\forall n$，总有

$$V_n=\bigcup_{\alpha\in I_n}U_\alpha,\quad I_n\subset I.$$

根据(4.2)及(4.6)，我们看出

$$V_n=\bigcup_{\alpha\in I_n}U_\alpha=\bigcup_{\alpha\in I_n^*}U_\alpha,\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots),$$

其中 $I_n^*\subset I_n$，并且每个 I_n^* 都是可数集. 令

$$I^*=I_1^*\cup I_2^*\cup I_3^*\cup\cdots\cup I_n^*\cup\cdots,$$

那末，由于 I^* 是可数集的可数并，因而也是可数的. 这样一来，$\{U_\alpha\}_{\alpha\in I^*}$ 是 $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ 的一个可数子族，并且也是空间 X 的一个基. ▌

(4.8) **定理** 设 X 是一个满足第二可数性公理的拓扑空间. 那末，空间 X 的两两不相交的非空开集所成的任何类是可数的.

证 令 $\mathscr{B}=\{V_1,\ V_2,\ \cdots,\ V_n,\ \cdots\}$

是空间 X 的一个可数基，又 $\mathscr{M}$ 是 X 中两两不相交的非空开集所成的一个类. 不妨设 $\forall n$, $V_n\neq\emptyset$. 现在定义函数 $\varphi:\mathscr{M}\to\mathscr{B}$ 如下：$\forall U\in\mathscr{M}$，令 $\varphi(U)=V_k$，其中 k 为能使 $V_k\subset U$ 的最小标数. 显而易见，φ 是 $\mathscr{M}$ 到 $\mathscr{B}$ 内的一个函数. 又 φ 还是一个单函数. 事实上，设 $U\in\mathscr{M}$, $W\in\mathscr{M}$，并设

$$\varphi(U)=\varphi(W)=V_k,$$

那末，$V_k\subset U$, $V_k\subset W$，因而 $U\cap W\neq\emptyset$. 属于 $\mathscr{M}$ 的集合既然两

两不相交，可见必定有 $U=W$. 因此，φ 是一个单函数. 于是集合类 $\mathscr{M}$ 与可数基 $\mathscr{B}$ 的一个子类 $\varphi(\mathscr{M})$ 等势，所以 $\mathscr{M}$ 也是可数的. ▌

现在让我们来定义空间的"可分性"，它与第二可数性公理有着密切的联系.

(4.9) **定义** 如果拓扑空间 X 有一个可数稠密子集，那末，空间 X 就叫做可分的.

(4.10) **定理** 任何满足第二可数性公理的拓扑空间 X 都是可分的.

证 根据假设，空间 X 有一个可数基 $\{U_n\}$. 令 x_n 表示开集 U_n 中的任意一点. 那末，有限或无穷序列 $\{x_n\}$ 各项所成的集合 A 显然是可数的. 不难看出，点集 A 在空间 X 中处处稠密. 事实上，如果 x 是空间 X 的任意点，又 V 是 x 的任一开邻域，则 $\exists n\in\mathbb{N}$, s.t. $x\in U_n\subset V$. 因为 $x_n\in U_n\cap A$，所以 $V\cap A\neq\emptyset$. 这证明了 $x\in\overline{A}$，从而证明了 $\overline{A}=X$. 因此 A 在空间 X 中处处稠密. ▌

不难看出，定理(4.10)的逆命题不真. 现在举例说明如下：

例 11 我们定义实数系 $\mathbb{R}$ 的子集类 $\mathscr{U}$ 如下：

1) $\emptyset\in\mathscr{U}$, $\mathbb{R}\in\mathscr{U}$；

2) 设 $U\subset\mathbb{R}$, $U\neq\emptyset$, $U\neq\mathbb{R}$. 那末，$U\in\mathscr{U}\Leftrightarrow 0\in U$ 且除 0 以外 U 不包含任何有理数(即或者 $U=\{0\}$ 或者 U 由 0 与无理数所组成). 显而易见，$\mathscr{U}$ 是 $\mathbb{R}$ 上的一个拓扑. 拓扑空间 $(\mathbb{R}, \mathscr{U})$ 是可分的，因为有理数系 $\mathbb{Q}$ 是它的一个可数稠密子集. 另一方面，拓扑 $\mathscr{U}$ 显然没有可数基，即空间 $(\mathbb{R}, \mathscr{U})$ 不满足第二可数性公理.

由此可见，可分空间不必满足第二可数性公理. 正是基于这个性质以及定理(4.10)，有的作者把满足第二可数性公理的拓扑空间叫做"完满可分的"(perfectly separable)，或者简直把它叫做

"可分的",而在定义(4.9)意义下的可分性则称之为"弱义可分的"(weakly separable). 我们不预备采用这些命名法.

五、度量空间的完全有界性与可分性

本节在讨论度量空间的可分性之前,将着重阐述与可分性、完全性以及下一章将专门介绍的"紧致性"都有密切联系的一个度量性质,即"完全有界性".

1. 度量空间的有界集与完全有界集 在拓扑学中,我们常常用到有界集的概念,也常用到有界函数及其上、下确界的概念,它们都是古典分析中相应概念的直接推广.

设 E 是一个任意的集合,f 是 E 上的一个实值函数. 如果集合 $f(E)$ 有上界、有下界或有界,则函数 f 分别叫做在 E 上有上界、有下界或有界;又 $f(E)$ 的上、下确界(如果存在的话)分别叫做函数 f 在 E 上的上、下确界,并且分别记作

$$\sup_{x\in E} f(x) \quad 及 \quad \inf_{x\in E} f(x).$$

显而易见,f 在 E 上有界 $\Leftrightarrow \exists \mu\in\mathbb{R},\ \mu\geqslant 0$, s. t.

$$\forall x\in E,\quad |f(x)|\leqslant\mu.$$

由此可知,空集上的实值函数必然有界.

以下涉及到的空间是一个随意固定的度量空间(X, d).

(5.1) **定义** 如果度量 d 在 A^2 上的限制是一个有界函数,则 A 称为空间 X 的一个**有界集**. 如果 X 作为空间 (X, d) 的点集是有界的,则 X 称为一个**有界空间**. 当 A 是有界集并且 $A\neq\emptyset$ 时,令

$$\delta(A)=\sup_{(x,y)\in A^2} d(x, y);$$

则 $\delta(A)$ 叫做点集 A 的直径. 如果 A 无界, 则我们说, A 的直径为无穷大: $\delta(A)=+\infty$.

我们约定, 空集的直径为零: $\delta(\emptyset)=0$.

这样一来, 除非 A 是单元集, 当 $A\neq\emptyset$ 时, 总有 $\delta(A)>0$. 又我们有:

$$A\subset B\Rightarrow\delta(A)\leqslant\delta(B);\quad \delta(A)=\delta(\overline{A}).$$

(5.2) **定义** 令 $A\subset X$, $A\neq\emptyset$, 并令 x 为空间 X 中随意固定的一个点. 我们称

$$\inf_{y\in A} d(x,\ y)$$

为点 x 到集合 A 的距离, 记作 $d(x,\ A)$:

$$d(x,\ A)=\inf_{y\in A} d(x,\ y)$$

现在设 A 与 B 都是 X 的非空点集, 令

$$d(A,\ B)=\inf_{(x,y)\in A\times B} d(x,\ y)$$

则 $d(A,\ B)$ 叫做集合 A 到集合 B 的距离.

显而易见, $\forall x\in X$, $\forall A\subset X\wedge B\subset X$, $A\neq\emptyset$, $B\neq\emptyset$, $d(x,\ A)$ 及 $d(A,\ B)$ 总存在, 并且总有

$$d(x,\ A)\geqslant 0,\quad d(A,\ B)\geqslant 0,\quad d(A,\ B)=d(B,\ A).$$

又显然 $d(x,\ A)=d(\{x\},\ A)$, 从而 $d(A,\ x)$ 可定义为 $d(A,\{x\})$. 于是有

$$d(x,\ A)=d(A,\ x).$$

同样明显地

$x\in A\Rightarrow d(x,\ A)=0$, 但逆命题不真;

$A\cap B\neq\emptyset\Rightarrow d(A,\ B)=0$, 但逆命题不真.

(5.3) **定理** $x\in\overline{A}\Leftrightarrow d(x,\ A)=0$.

证 设 $x\in\overline{A}$, 并设 ε 是任意的正数. 因为 $B(x,\ \varepsilon)$ 是点 x 的开邻域, 所以 $\exists y\in A\ni\cdot y\in B(x,\ \varepsilon)$, 亦即 $d(x,\ y)<\varepsilon$. 由此推

出，$d(x, A)<\varepsilon$. 但是 ε 是随意的正数，因此我们有 $d(x, A)=0$.

反之，设 $d(x, A)=0$, 并设 U 是点 x 的一个任意开邻域. 于是

$$\exists \varepsilon>0 \ni \cdot B(x, \varepsilon) \subset U.$$

因为 $d(x, A)=0$, 所以

$$\exists y \in A \ni \cdot d(x, y)<\varepsilon.$$

因此，$y\in U$. 这样一来，点 x 的任意开邻域都与 A 相交，所以 $x\in \overline{A}$. ▌

我们现在去定义度量空间及其点集的完全有界性.

(5.4) **定义** 令 ε 为随意给定的一个正数，A 为度量空间 X 的一个非空点集. 如果

$$\forall x\in X \quad 总有 \quad d(x, A)<\varepsilon,$$

那末，点集 A 叫做在空间 X 中是 **ε-稠密的**. 如果一个 ε-稠密集是有限集，那末，它就叫做空间 X 中的一个 **ε-网**. 如果 $\forall \varepsilon>0$, 总 $\exists$ 空间 X 中的一个 ε-网，那末，X 就叫做一个**完全有界空间**. 空间 X 的点集 $E\neq\emptyset$, 如果作为 X 的度量子空间是完全有界的，则 E 称为空间 X 的**完全有界集**.

我们约定，空集是任何度量空间的完全有界集.

由定义(5.4)立即推出下面的命题.

(5.5) 每个完全有界空间都是有界空间. 因此，任何度量空间的每个完全有界集也都是有界的.

证 设空间 X 是完全有界的. 那末，$\forall \varepsilon>0$, 总 $\exists X$ 的一个 ε-网 A. 由于 A 是有限集，因此 A 的直径 $\delta(A)<+\infty$. 于是

$$\forall (x, x')\in X^2, \ \exists (y, y')\in A^2, \text{ s. t.}$$

$$d(x, y)<\varepsilon, \ d(x', y')<\varepsilon.$$

由此推出

$$d(x, x')\leqslant d(x, y)+d(y, y')+d(y', x')<2\varepsilon+\delta(A),$$

所以空间 X 是有界的. ▌

然而不难看出，并不是每个有界空间都是完全有界的. 为了说明这个，我们举出下面的例子.

例 12 试看希尔伯特空间 H^{ω} 的子空间

$$X=\{a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots\},$$

它的各个点 a_n 的坐标除开第 n 个坐标是 1 以外全都是零. 例如

$$a_1=(1, 0, 0, \cdots, 0, \cdots),$$
$$a_2=(0, 1, 0, \cdots, 0, \cdots),$$
$$a_3=(0, 0, 1, 0, \cdots, 0, \cdots),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

显然，当 $n\neq m$ 时恒有 $d(a_m, a_n)=\sqrt{2}$. 可见 X 是有界空间. 如果取 $\varepsilon\in\mathbb{R}$, s. t. $0<\varepsilon<\sqrt{2}$, 那末, $\forall X$ 的非空有限子集 A, 总 $\exists$ 点 $a_n\in X$, s. t.

$$d(a_n, A)=\sqrt{2}>\varepsilon.$$

因此，对于这样的 ε, X 中不存在 ε-网. 由此可见，X 不是完全有界的.

(5.6) 如果 X 是一个完全有界空间，则 X 的每个子集都是完全有界的.

证 令 $S\subset X$. 由于空集是完全有界的，故可设 $S\neq\emptyset$. 令 ε 为随意给定的一个正数. 那末，因为 X 是一个完全有界空间，所以 $\exists X$ 的一个 $\frac{1}{2}\varepsilon$-网 A. 设

$$A=\{a_1, a_2, \cdots, a_n\};$$

则 S 的每个点必须属于某一个开球 $B\left(a_i, \frac{\varepsilon}{2}\right)$. 从包含 S 的点的每个开球 $B\left(a_i, \frac{\varepsilon}{2}\right)$ 中取出而且只取出 S 的一个点. 于是所有这些点组成 S 的一个子集

$$B^* = \{b_1, b_2, \cdots, b_m\}, (m \leqslant n),$$

显然，B^* 是 S 的一个 ε-网．事实上，当 x 是 S 的任意点时，则必有自然数 i 及 k，s. t.

$$x \in B\left(a_i, \frac{\varepsilon}{2}\right), \quad b_k \in B\left(a_i, \frac{\varepsilon}{2}\right).$$

于是 $$d(x, b_k) \leqslant d(x, a_i) + d(b_k, a_i) < \varepsilon.$$

由此可见，$d(x, B^*) < \varepsilon$．因为 ε 是随意的，所以点集 S 完全有界．】

(5.7) 如果 S 是度量空间 X 的完全有界集，则 S 的闭包 $\bar{S}$ 也是 X 的完全有界集．

证 $\forall \varepsilon > 0$，点集 S 既然完全有界，它就必定有一个 ε-网 A．暂且固定 ε 及 A．设 p 是 $\bar{S}$ 的任意点；则

$$\forall \eta \in \mathbb{R}, \quad \eta > 0, \quad \exists x \in S, \quad \text{s. t. } d(p, x) < \eta.$$

因为 A 是 S 的 ε-网，所以 $\exists x' \in A \ni \cdot d(x, x') < \varepsilon$．于是

$$d(p, x') < \varepsilon + \eta.$$

因为 ε 与 η 是随意的，所以 $\bar{S}$ 是完全有界的．】

(5.8) **定理** 度量空间 X 是完全有界的 $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$，$\exists X$ 的有限多个子集 $M_1, M_2, \cdots, M_n$，s. t. $\forall i \in A(n)$，$\delta(M_i) < \varepsilon \wedge$ s. t.

$$X = M_1 \cup M_2 \cup \cdots \cup M_n.$$

证 $\Leftarrow$．从各个 M_i 选出一点 a_i，令

$$A = \{a_i \mid i \in A(n)\};$$

则 A 显然是空间 X 的一个 ε-网．因此空间 X 是完全有界的．

$\Rightarrow$．$\forall \varepsilon > 0$，取正数 $\varepsilon' < \frac{1}{2}\varepsilon$；则因为空间 X 是完全有界的，所以 X 有一个 ε'-网

$$A = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}.$$

$\forall i\in A(n)$，令 $M_i=B(a_i, \varepsilon')$；则 $\delta(M_i)\leqslant 2\varepsilon'<\varepsilon$，并且

$$X=M_1\cup M_2\cup\cdots\cup M_n. \blacksquare$$

定理(5.8)中的$\{M_1, M_2, \cdots, M_n\}$是空间 X 的一个覆盖．由于

$$\forall i\in A(n),\quad \delta(M_i)<\varepsilon,$$

我们又把 $\{M_1, M_2, \cdots, M_n\}$

叫做空间 X 的一个 ε–覆盖．显然当

$$X=M_1\cup M_2\cup\cdots\cup M_n$$

时，我们必然还有

$$X=\overline{M}_1\cup \overline{M}_2\cup\cdots\cup \overline{M}_n.$$

因此，当空间 X 完全有界时，$\forall \varepsilon>0$，空间 X 不但有一个开的 ε-覆盖，而且还有一个闭的 ε-覆盖．

例 13 n 维欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 的任何有界集都是完全有界的．这是因为，$\mathbb{R}^n$ 的每个有界集都可以装入一个 n 维立方体①中，而这个 n 维立方体又可以分成有限个直径任意小的 n 维立方体．

(5.9) **定义** 设 M 是任意的非空集合．如果 f 是 M 到度量空间 X 内的一个函数，那末，M 在 f 之下的象 $f(M)$ 的直径(即 f 的值域的直径) $\delta(f(M))$ 叫做**函数 f 的直径**，并且记作 $\delta(f)$．特别地，当 f 是度量空间 X 中的一个序列 $\{a_n\}$ 时，则把函数 f 的直径写成 $\delta(a_n)$，叫做**序列 $\{a_n\}$ 的直径**．

我们可以把数值函数有界性的概念推广如下：

(5.10) **定义** 设 $f:M\to(X, d)$，并设 $\{a_n\}$ 是 X 中的一个序列．则

$$f \text{ 有界} \Leftrightarrow \delta(f)<+\infty;$$

$$\{a_n\} \text{ 有界} \Leftrightarrow \delta(a_n)<+\infty.$$

(5.11) **引理** 如果 X 是一个完全有界空间，则对于任意的

① 设 $a<b$；则 $[a, b]^n$ 可以称为 $\mathbb{R}^n$ 中的 n 维立方体．

$\varepsilon>0$, X 中的每个序列都有一个子序列，它的直径小于 ε.

证 根据定理(5.8)，$\forall\varepsilon>0$，$\exists X$ 的一个有限 ε-覆盖

$$\{M_1,\ M_2,\ \cdots,\ M_n\},$$

其中至少有一个 M_i 包含 X 中任意给定的一个序列 $\{a_n\}$ 的无穷多个项，因而 $\{a_n\}$ 有一个子序列 $\{a_{n_\nu}\}$，它的各个项 a_{n_ν} 都属于 M_i，于是有 $\delta(a_{n_\nu})<\varepsilon$. 】

(5.12) **定理** 空间 X 是完全有界的 $\Leftrightarrow X$ 中的每个序列都含有一个柯西序列作为其子序列.

证 $\Leftarrow$. $\forall\varepsilon>0$，在 X 中选定点 a_1 与 a_2，s. t.

$$d(a_1,\ a_2)\geqslant\varepsilon;$$

然后再选定一点 a_3，s. t.

$$d(a_1,\ a_3)\geqslant\varepsilon,\ d(a_2,\ a_3)\geqslant\varepsilon,$$

依此类推. 这样的选择如果继续进行下去，到一定地步必然终止，于是得到空间 X 中有限个点 $a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n$，s. t.

$$i\neq k\Rightarrow d(a_i,\ a_k)\geqslant\varepsilon\wedge\forall x\in X,\quad\exists a_i,\ \text{s. t.}$$

$$d(a_i,\ x)<\varepsilon.$$

因为不然的话，我们就会得到 X 中的一个序列，它的任何子序列都不是柯西序列，而与定理的条件矛盾. 显而易见

$$X=B(a_1,\ \varepsilon)\cup B(a_2,\ \varepsilon)\cup\cdots\cup B(a_n,\ \varepsilon),$$

于是根据定理(5.8)，知道空间 X 是完全有界的.

$\Rightarrow$. 设 X 是一个完全有界空间. 根据引理(5.11)，X 中的任何序列 $\{x_n\}$ 都有一个子序列

$$x_{p_1},\ x_{p_2},\ x_{p_3},\ \cdots,\ x_{p_n},\ \cdots$$

它的直径 $\delta(x_{p_n})<1$; 序列 $\{x_{p_n}\}$ 必须有一个子序列

$$x_{q_1},\ x_{q_2},\ x_{q_3},\ \cdots,\ x_{q_n},\ \cdots$$

它的直径 $\delta(x_{q_n})<\frac{1}{2}$; 序列 $\{x_{q_n}\}$ 又必须有一个子序列

$$x_{r_1},\ x_{r_2},\ x_{r_3},\ \cdots,\ x_{r_n},\ \cdots$$

它的直径 $\delta(x_{r_n})<\dfrac{1}{3}$；依此类推．既然

$$p_1\leqslant q_1<q_2\leqslant r_2<r_3\leqslant\cdots<\cdots,$$

可见从这一序列的序列得到的“对角线序列”

$$x_{p_1},\ x_{q_2},\ x_{r_3},\ \cdots$$

是所给序列 $\{x_n\}$ 的一个子序列．如果把这一对角线序列的第 n 项写成 x_{ν_n}，则 x_{ν_n} 来自上述第 n 个子序列，所以

$$m\geqslant n\Rightarrow d(x_{\nu_m},\ x_{\nu_n})<\frac{1}{n}.$$

由此可见，$\{x_n\}$ 的子序列 $\{x_{\nu_n}\}$ 是一个柯西序列．▌

(5.13)　**定理**　度量空间 X 是完全的 $\Leftrightarrow X$ 的每个完全有界集中的任意序列都有在 X 中收敛的子序列．

证　$\Rightarrow$．这直接从定理(5.12)和完全空间的定义推得．

$\Leftarrow$．假定 X 不是完全空间，并且假定 $\{x_n\}$ 是 X 中的发散柯西序列．不失一般性，我们还可以假定 $\{x_n\}$ 的项成对地不相等．于是集合

$$B=\{x_n\mid n\in\mathbb{N}\}$$

中的每个序列都含有一个柯西序列作为它的子序列；从定理(5.12)看出，B 是空间 X 的一个完全有界集，但是 B 中的序列 $\{x_n\}$ 却没有在 X 中收敛的子序列，这与已知条件矛盾．▌

2．可分度量空间　通过例 11 我们看出，定理(4.10)的逆命题不真．但是如果定理(4.10)中的空间 X 是一个度量空间，那末，它的逆定理也成立．换句话说，对于度量空间，具有可数基与具有可数稠密子集这两个条件是等价的．下面的定理就说明这一事实．

(5.14)　**定理**　度量空间 X 是可分的 $\Leftrightarrow X$ 满足第二可数性公理．

证 $\Leftarrow$. 这是定理(4.10)的特殊情形.

$\Rightarrow$. 假定度量空间 X 有一个可数稠密子集

$$D=\{x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots\}.$$

令

$$\mathscr{B}=\{V\in\mathscr{T}_d \mid \exists n\in\mathbb{N}\wedge\exists r\in\mathbb{Q},\ r>0,\ \ni\cdot V=B(x_n, r)\},$$

其中 $\mathscr{T}_d$ 是度量 d 所导致的 X 上的拓扑. 那末, $\mathscr{B}$ 显然是可数的. 不难断定, $\mathscr{B}$ 是拓扑 $\mathscr{T}_d$ 的一个基. 事实上, 任取 $U\in\mathscr{T}_d$, $U\neq\emptyset$. 于是

$$\forall x\in U,\ \exists\delta>0\ni\cdot B(x, \delta)\subset U.$$

因为 D 在空间 X 中处处稠密, 所以

$$\exists x_n\in D,\ \text{s. t.}\ x_n\in B\left(x, \frac{\delta}{4}\right),$$

即
$$d(x, x_n)<\frac{\delta}{4}.$$

取正的 $r\in\mathbb{Q}$, s. t. $\frac{\delta}{4}<r<\frac{\delta}{2}$. 因为 $d(x, x_n)<r$, 所以

$$x\in B(x_n, r).$$

此外 $\forall y\in B(x_n, r)$, 显然有 $d(x_n, y)<r<\frac{\delta}{2}$,

从而有
$$d(x, y)<\frac{\delta}{4}+\frac{\delta}{2}<\delta.$$

这就是说, $y\in B(x, \delta)$. 所以我们有

$$x\in B(x_n, r)\subset B(x, \delta)\subset U.$$

由此可见, $\mathscr{B}$ 是拓扑 $\mathscr{T}_d$ 的一个基, 因此空间 X 满足第二可数性公理. ▌

下面的定理表明完全有界性与可分性有着密切的联系.

(5.15) **定理** 每个完全有界空间 X 都是可分的.

证 X 既然是一个完全有界空间, 那末, $\forall\varepsilon>0$, 总 $\exists X$ 中的一个 ε-网 $A(\varepsilon)$. 令

$$A=\bigcup_{n=1}^{\infty} A\left(\frac{1}{n}\right);$$

则 A 显然是一个可数集. 设 x 是空间 X 的任意点. 因为 $\forall y\in A$ 总有

$$d(x, A)\leqslant d(x, y),$$

所以 $\forall n\in\mathbb{N}$ 总有 $d(x, A)<\frac{1}{n}$. 由此得出结论: $d(x, A)=0$. 于是根据定理(5.3), $x\in\overline{A}$. 由于 x 是空间 X 的任意点, 我们就证明了 $\overline{A}=X$. 换句话说, 可数集 A 在空间 X 中处处稠密. 因此空间 X 是可分的. 】

(5.16) **系** 每个完全有界空间 X 都满足第二可数性公理.

证 这是定理(5.15)与(5.14)的直接推论. 】

我们最后去证明:

(5.17) 希尔伯特空间 H^{ω} 是可分的, 因此它满足第二可数性公理.

证 令

$$D=\{x=\{x_n\}\in\mathbb{R}^{\omega}\mid \exists n\in\mathbb{N}\ni\cdot i\in\mathbb{N},\ i>n \\ \Rightarrow x_i=0\wedge i\leqslant n\Rightarrow x_i\in\mathbb{Q}\}.$$

那末, D 显然是一个可数集, 并且 $D\subset H^{\omega}$. 设

$$x=(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n,\ \cdots)$$

是 H^{ω} 的任意点. 因为级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2$ 是收敛的, 所以 $\forall\varepsilon>0, \exists n\in\mathbb{N}$, s. t.

$$\sum_{i=n+1}^{\infty} x_i^2<\frac{\varepsilon^2}{2}.$$

取有理数 $r_1, r_2, \cdots, r_n$, s. t.

$$\forall i\in A(n),\ (x_i-r_i)^2<\frac{\varepsilon^2}{2n};$$

则必有
$$\sum_{i=1}^{n}(x_i-r_i)^2+\sum_{i=n+1}^{\infty}x_i^2<\varepsilon^2.$$

若令
$$r=(r_1,\ r_2,\ \cdots,\ r_n,\ 0,\ 0,\ \cdots,\ 0,\ \cdots),$$

则 $r\in D$, 并且 $d(x,\ r)<\varepsilon$. 这证明了可数集 D 在希尔伯特空间 H^ω 中处处稠密，因此 H^ω 是可分的. 后一个断语直接从定理(5.14)判明为真.]

例 14 离散度量空间($\mathbb{R}$, d_0)是一个不可分的度量空间，因为它的任何稠密集只能是 $\mathbb{R}$.

习　　题

试证下列各命题:

1. T_0 空间与 T_1 空间的子空间分别为 T_0 空间与 T_1 空间.
2. T_1 空间的每个有限点集的导集都是空集.
3. 在 T_1 空间里把有限多个点添加到一个点集里去，或者从一个点集取出有限多个点，决不会改变这个点集的导集.
4. 一族 T_0 或 T_1 空间的积空间仍然分别是 T_0 或 T_1 空间.
5. 如果 T_1 空间的点集 A 是闭的和连通的，并且 A 至少包含两个点，则 A 是一个完备集.
6. $\forall m\in\mathbb{N}$, 令 φ 为自然数系的 m 数段 $A(m)$ 的一个置换，即 $A(m)$ 到它自身上的双一一函数. 设 $\{a_n\}$ 为一已知序列; 当 $n\leqslant m$ 时令 $b_n=a_{\varphi(n)}$, 而当 $n>m$ 时令 $b_n=a_n$; 则序列 $\{b_n\}$ 叫做序列 $\{a_n\}$ 的一个重列. 如果 $\{a_n\}$ 是 T_2 空间 X 中的一个收敛序列，则 $\{a_n\}$ 的任何重列 $\{b_n\}$ 也在 X 中收敛，并且
$$\lim a_n=\lim b_n.$$
7.* 设 f 是拓扑空间 X 的非空点集 A 到 T_2 空间 Y 内的一个函数，并且 $p_0\in\bar{A}$. 如果
$$\lim_{\substack{p\to p_0\\ p\in A}}f(p)=q,\qquad 又\qquad \lim_{\substack{p\to p_0\\ p\in A}}f(p)=q',$$
其中 $q,\ q'\in Y$, 则 $q=q'$. 换句话说，如果任意空间的非空点集到 T_2 空间内的函数在一点 $p_0\in\bar{A}$ 处有极限，则此极限是唯一的.

8. 令 $\{p_n\}$ 为拓扑空间 X 中的一个序列，又 $p\in X$. 如果 $\forall p$ 的邻域 U_p, $\exists$ 无穷多个 $n\in\mathbb{N}$, s. t. $p_n\in U_p$, 则 p 叫做序列 $\{p_n\}$ 的一个**聚点或极限点**. 如果 X 是一个 T_2 空间，又 $\{p_n\}$ 是 X 中的一个收敛序列，则 $\{p_n\}$ 有一个且只有一个聚点(它就是序列 $\{p_n\}$ 的极限)；但逆命题不真.

9. 设 X 是满足第一可数性公理的一个拓扑空间，又 $A\subset X$, $A\neq\emptyset$. X 的一点 $x\in\bar{A}\Leftrightarrow\exists A$ 中的一个序列 $\{x_n\}$, s. t.

$$\lim x_n=x.$$

10. 如果空间 X 满足第一可数性公理，又 X 中每个收敛序列的极限是唯一的，则 X 是一个豪斯道夫空间.

11. 如果满足第二可数性公理的拓扑空间 X 由不可数个点所组成，又 f 是空间 X 到豪斯道夫空间 Y 内的连续函数，则存在空间 X 的一个可数点集 A，使得在 A 上与 f 相等的 X 到 Y 内的任意连续函数 φ，在整个空间 X 上与 f 相等.

12. 设 D 是复数平面 $\mathbb{C}$(即 $\forall z, z'\in\mathbb{C}$, 以 $d(z, z')=|z-z'|$ 为度量的度量空间$(\mathbb{C}, d)$)的一个闭区域，则定义并一致连续于 D 内部的每个复值函数有一个而且只有一个向区域 D 的连续开拓.

13. 设度量空间(X, d)是连通的，并且至少包含两个不同的点；则

$$\forall a\in\mathbf{R},\ \text{s. t. } 0<a<\delta(X),$$
$$\exists (x, y)\in X^2,\ \text{s. t. } d(x, y)=a,$$

因而空间 X 由不可数多个点所组成.

14. 设 A 是度量空间 X 的连通集，并且 A 至少包含两个不同的点. 令 $x\in X$, 并令

$$a=d(x, A),\quad b=\sup_{y\in A} d(x, y),$$

则 $a\leqslant b$; 又 $a<b\wedge c\in\mathbf{R}\ni\cdot$

$$a<c<b\Rightarrow\exists y\in A\ni\cdot d(x, y)=c.$$

15. $\forall(a, b)\in\mathbf{R}^2\ni\cdot a<b$, 习题(二)V, 4 中的空间 $F^*_{a,b}$ 是可分的.

第四章 紧 致 性

在这一章里①，我们将介绍一个很重要的拓扑性质，即拓扑空间及其点集的"紧致性"。它之所以显得很重要，原因在于它使我们能用有限族去代替无穷族，因而能使我们用有限去驾驭无穷。

有着各式各样的"紧致性"，它们将在适当的条件下统一起来。

使我们特别感到兴趣的，也许莫过于"紧致性"的理论在欧氏空间里的应用了。这将是本章最后一节的内容。在这一节里我们将看出，在欧氏空间里，"紧致性"与"有界且闭"是等价的，并且古典分析里若干著名定理的基础就是"紧致性"。后者是从前者抽象或"提炼"出来的。这一"提炼"的过程使得古典的理论得到推广和发展，这就形成了拓扑空间的紧致性理论。它不但加深了我们对于古典理论的认识，而且还使现代数学的许多分支得到了广泛而有意义的应用。

一、紧致空间与列紧空间

本节将阐述空间或空间的点集的紧致性与列紧性，豪斯道夫空间里紧致集的性质，以及定义域为紧致空间、值域为一般拓扑空间或豪斯道夫空间的连续函数，并阐明紧致性是一个拓扑性质。

1. 紧致集 我们把海纳(Heine)、波雷尔(Borel)、勒贝格

---

① 本章的主要内容除出自第一章第八节实直线上的脚注的来源外，其中很大一部分(特别是第一、三两节的内容)取自 R. H. Fox 教授在1946年为普林斯顿大学研究生所开《点集拓扑学》一课的、为本书前一作者所记、据悉未发表的课堂讲授笔记。但所有这些内容已为本书前一作者所糅合、穿插、增补、另证，从而失去原样。

(Lebesgue) 著名的"有限覆盖定理"的广义形式作为条件来定义点集的紧致性.

(1.1) **定义** 设 X 是任一拓扑空间, 又 A 是 X 的任意点集. 如果我们能够从 A 的任何开覆盖 $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ 取出 A 的一个有限子覆盖 $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I'}$($I'\subset I$, I' 为有限集), 那末, A 就叫做空间 X 的一个**紧致集**, 或简称**紧集**. 特别地, 当 X 作为点集是紧致集时, X 就叫做一个**紧致拓扑空间**, 或简称为**紧致空间**或**紧空间**.

由定义(1.1)立即看出, 空间 X 的任何有限集(包括空集)都是 X 的紧致集. 特别地, 当空间 X 为有限时, X 是一个紧空间. 又 X 的任何非空紧致集 A 也可以看成一个紧空间; 这是因为, A 可以看成为空间 X 的子空间, 并且点集 A 是紧致的 $\Leftrightarrow$ 子空间 A 是紧致的.

例 1 设 X 为一离散空间. 那末, X 是紧致的 $\Leftrightarrow$ X 是有限的. 事实上, 如上所论, 条件显然是充分的. 为了证明条件也是必要的, 我们假定 X 是无穷的. 如此, $\forall x\in X$, 若令 $U_x=\{x\}$, 则 $\{U_x\}_{x\in X}$ 是空间 X 的一个开覆盖, 但是它显然没有有限子覆盖. 所以 X 不是紧致的. 这就证明了条件的必要性. 从这个事实看来, 紧致性也可以看成是集合论中有限这一概念的推广.

显而易见, 对于任意空间的离散集、甚至孤集来说,"紧致性"与"有限"两个概念也等价. 但一般说来, 情形并非如此: 空间的每个有限子集虽然是紧致的, 但紧致集则不必是有限集.

例 2 在实直线 $\mathbb{R}$ 中每个有界闭区间 $[a, b]$ 都是 $\mathbb{R}$ 的紧致集. 这个命题是《实分析》中海纳-波雷尔-勒贝格的有限覆盖定理的一个明显的推广. 事实上, 当 $a=b$ 时, 退化的闭区间 $[a, b]$ 是一个单元集, 因此它是紧致的. 设 $a<b$, 并设 $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ 是区间 $[a, b]$ 在 $\mathbb{R}$ 中的任一开覆盖. $\forall\alpha\in I$, U_α 是一族有界开区间的并集. 所有这些开区间构成一个开区间族 $\{J_\beta\}_{\beta\in K}$, 它显然是闭

区间$[a, b]$的一个开覆盖。于是根据前面提到的有限覆盖定理，$\{J_\beta\}_{\beta\in K}$ 有一个有限子覆盖 $\mathscr{J}=(J_{\beta_1}, J_{\beta_2}, \cdots, J_{\beta_n})$. 显然 $\forall i\in A(n)$, $\exists \alpha_i\in I$, s. t. $J_{\beta_i}\subset U_{\alpha_i}$. 令

$$\mathscr{U}_*=(U_{\alpha_1}, U_{\alpha_2}, \cdots, U_{\alpha_n}).$$

既然 $\mathscr{J}$ 是$[a, b]$的覆盖，那么 $\mathscr{U}_*$ 当然也是$[a, b]$的一个覆盖. 于是 $[a, b]$ 的任意开覆盖 $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ 都有一个有限子覆盖 $\mathscr{U}_*$, 所以$[a, b]$是紧致的. ▌

我们知道，$\forall a<b$, $\mathbb{R}$ 的紧集$[a, b]$都是不可数集。

例 3 实直线 $\mathbb{R}$ 不是紧致的. 事实上 $\{]-n, n[\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是 $\mathbb{R}$ 的一个开覆盖，但是它显然没有有限子覆盖. 同理可知，非退化的开区间、半开区间或无穷闭区间都不是实直线 $\mathbb{R}$ 的紧集.

(1.2) 紧致空间的每一个闭集都是紧致的.

证 设 X 是一个紧致空间，又 A 是 X 的一个任意闭集. 于是 $\mathscr{C}A$ 是 X 的一个开集. 如果 $\mathscr{U}=\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ 是 A 的一个任意开覆盖，则显然 $\mathscr{V}=\{\mathscr{C}A, U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ 是紧致空间 X 的一个开覆盖，从而 $\mathscr{V}$ 有一个有限子覆盖 $(U_{\alpha_1}, U_{\alpha_2}, \cdots, U_{\alpha_n}, \mathscr{C}A)$. 因此，$(U_{\alpha_1}, U_{\alpha_2}, \cdots, U_{\alpha_n})$是 $\mathscr{U}$ 的一个有限子覆盖. 这样一来，闭集 A 的任意开覆盖 $\mathscr{U}$ 都有一个有限子覆盖，所以 A 是紧致的. ▌

我们从例 3 可以看出，非紧致空间的闭集不必是紧致的. 这是因为，每个无穷闭区间都是实直线 $\mathbb{R}$ 的闭集，但是它们都不是紧致的. 我们在下面去举例说明，拓扑空间、甚至紧致空间的紧致集也不必是闭集，即(1.2)的逆命题不真.

例 4 取例(三) 2 中的拓扑空间$(\mathbb{N}, \mathscr{T}_*)$为例. 这个空间不是紧致的，但是它的开集除 $\mathbb{N}$ 而外都是紧致的，因为它们都是有限集. 这些紧致的开集除空集而外没有一个是闭集，因为它们的余集都不是开集. 现在 $\forall n>1$, 让我们来看空间$(\mathbb{N}, \mathscr{T}_*)$的子空间 $A(n)=\{1, 2, \cdots, n\}$. $A(n)$是一个紧致空间，又单元集 $\{1\}$ 是

它的一个紧致开集，但不是它的闭集，因为子空间 $A(n)$ 中包含 1 的闭集只有 $A(n)$.

紧致空间的定义(1.1)中涉及到的是一族开集的并集，运用偕·摩尔根定律(0.5.8)我们就得到一族闭集的交集．所以空间的紧致性，还可以用另一种方式来定义．为此我们有必要引进“有限交性质”的概念．

(1.3) **定义** 令 X 为任意的非空集合，并令 $\{F_\alpha\}$ 为任意一族 X 的子集．如果 $\{F_\alpha\}$ 每个有限子族的交集都是非空的，那末，我们就说，集合族 $\{F_\alpha\}$ 具有**有限交性质**．

我们看出，有限交性质这一概念是一个纯粹集合论的概念．

(1.4) **定理** 拓扑空间 X 是紧致的 $\Leftrightarrow \forall$ 具有有限交性质的 X 的闭集族 $\{F_\alpha\}$，总有 $\bigcap_\alpha F_\alpha \neq \emptyset$.

证 $\Rightarrow$. 设 $\{F_\alpha\}$ 是具有有限交性质的 X 的一个任意闭集族．$\forall \alpha$, 令 $U_\alpha = \mathscr{C} F_\alpha$; 则每个 U_α 都是开集．不难看出，开集族 $\{U_\alpha\}$ 没有任何有限子族能够是紧致空间 X 的覆盖．事实上，假定$(U_{\alpha_1}, U_{\alpha_2}, U_{\alpha_3}, \cdots, U_{\alpha_n})$是 $\{U_\alpha\}$ 的一个随意有限子族．因为 $\{F_\alpha\}$ 具有有限交性质，所以

$$\exists p \in X, \text{s.t. } p \in F_{\alpha_1} \cap F_{\alpha_2} \cap F_{\alpha_3} \cap \cdots \cap F_{\alpha_n}.$$

但是
$$F_{\alpha_i} = \mathscr{C} U_{\alpha_i} \quad (i=1, 2, 3, \cdots, n);$$

因此 $p \notin \bigcup_{i=1}^n U_{\alpha_i}$. 这证明了$(U_{\alpha_1}, U_{\alpha_2}, U_{\alpha_3}, \cdots, U_{\alpha_n})$不是空间 X 的覆盖．由于空间 X 是紧致的，开集族 $\{U_\alpha\}$ 就不能是 X 的覆盖．因此

$$\exists q \in X, \text{s.t. } \forall \alpha, \quad q \notin U_\alpha.$$

所以
$$q \in \bigcap_\alpha F_\alpha, \quad \text{即} \quad \bigcap_\alpha F_\alpha \neq \emptyset.$$

$\Leftarrow$. 设条件满足，并设 $\{U_\alpha\}$ 是 X 的一个任意开覆盖．$\forall \alpha$, 令 $F_\alpha = \mathscr{C} U_\alpha$. 于是每一个 F_α 都是闭集．因为

$$\forall p\in X,\quad \exists\alpha,\ \text{s.t.}\ p\in U_\alpha,$$

所以$\bigcap_\alpha F_\alpha=\emptyset$. 条件既然满足，闭集族$\{F_\alpha\}$就不可能具有有限交性质．这就是说，$\{F_\alpha\}$必须有一个有限子族$(F_{\alpha_1}, F_{\alpha_2}, \cdots, F_{\alpha_n})$, s.t.

$$\bigcap_{i=1}^n F_{\alpha_i}=\emptyset.$$

因此

$$\begin{aligned}\mathscr{C}F_{\alpha_1}\cup\mathscr{C}F_{\alpha_2}\cup\cdots\cup\mathscr{C}F_{\alpha_n}&=\mathscr{C}(F_{\alpha_1}\cap F_{\alpha_2}\cap\cdots\cap F_{\alpha_n})\\&=\mathscr{C}\emptyset=X,\end{aligned}$$

即

$$U_{\alpha_1}\cup U_{\alpha_2}\cup\cdots\cup U_{\alpha_n}=X.$$

于是空间X的任意开覆盖$\{U_\alpha\}$都有一个有限子覆盖$(U_{\alpha_1}, U_{\alpha_2}, \cdots, U_{\alpha_n})$，所以空间$X$是紧致的．▌

2. 列紧集 "列紧性"是从《数学分析》中维尔斯特拉斯(Weierstrass)、波尔察诺(Bolzano)的"聚点原则"推广得来的．

(1.5) **定义** 设X是一个随意给定的拓扑空间，又$A\subset X$. 如果A的每个无穷子集都至少有一个聚点属于A，则A叫做空间X的一个**列紧集**．如果X作为空间X的点集是列紧的，则拓扑空间X叫做一个**列紧空间**．

从定义(1.5)立即看出，任意空间的所有有限点集是列紧的；特别地，空集是一个列紧集，有限空间则为列紧空间．同样明显地，列紧空间的每个闭集都是列紧集，又任意有限个列紧集的并集是列紧的．

与上一款所论相同，空间X的每个非空列紧集都可以看成是一个列紧空间，因此我们可以只提列紧空间而不提列紧集．

下面的命题说明，紧致性不弱于列紧性．

(1.6) 每一个紧致空间都是列紧空间．

证 设A是紧致空间X的一个无穷集．如果A没有聚点，

则 $\forall x\in X$, $\exists x$ 的一个开邻域 U_x, s. t.

$$U_x\cap(A-\{x\})=\emptyset.$$

$\{U_x\}_{x\in X}$ 既然是紧致空间 X 的一个开覆盖, 那末, $\{U_x\}_{x\in X}$ 就必须有一个有限子覆盖 $(U_{x_1}, U_{x_2}, \cdots, U_{x_n})$:

$$X=U_{x_1}\cup U_{x_2}\cup\cdots\cup U_{x_n}.$$

但是属于每个 U_{x_i} 的 A 中的点, 最多只能有一个, 因此 A 为有限集. 这与所设矛盾. 因此, A 必须至少有一个聚点. 所以 X 是列紧的. ▌

容易看出, 命题(1.6)的逆命题不真, 即列紧空间并不一定是紧致的. 因此, 紧致性强于列紧性.

例 5 我们在例 4 中已经指出, 空间$(\mathbb{N}, \mathscr{T}_*)$不是紧致的, 因为 $\{A(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ 就是 $\mathbb{N}$ 的一个开覆盖, 它显然没有有限子覆盖. 另一方面不难看出, $(\mathbb{N}, \mathscr{T}_*)$是列紧的. 事实上, 如果 A 是 $\mathbb{N}$ 的任一无穷子集, 则 A 中有一个最小整数 n_0. 显然 $\mathbb{N}$ 中任何大于 n_0 的点 n 都是空间$(\mathbb{N}, \mathscr{T}_*)$中点集 A 的聚点. 这是因为, n 的任何开邻域 U_n 都必须包含点 n_0, 从而包含 A 中异于 n 的一个点. 由此可见, $(\mathbb{N}, \mathscr{T}_*)$是一个列紧空间.

下面的定理是康托尔的区间套原则的一个推广.

(1.7) **康托尔定理** 如果 $\{F_n\}$ 是列紧 T_1 空间 X 的非空闭集的一个序列, s. t.

$$F_1\supset F_2\supset F_3\supset\cdots\supset F_n\supset\cdots, \tag{*}$$

则 $\bigcap_{n=1}^{\infty}F_n\neq\emptyset$.

证 从每个 F_n 中取出一点 x_n. 令

$$X_1=\{x\in X\mid \exists n\in\mathbb{N}\ni\cdot x=x_n\}.$$

如果 X_1 是一个有限集, 则 $\exists x_*\in X_1$, s. t. 对于无穷多个 $n\in\mathbb{N}$, $x_*=x_n$. 如此, 则显然

$$x_*\in\bigcap_{n=1}^{\infty}F_n,$$

所以 $$\bigcap_{n=1}^{\infty}F_n\neq\emptyset.$$
于是我们可以假定 X_1 是一个无穷集. X_1 既然是列紧集 F_1 的无穷子集, 可见 $X_1'\neq\emptyset$, 并且 $X_1'\subset F_1$. 令

$$X_n=\{x=x_k \mid k\in\mathbb{N},\ k\geqslant n\}.$$

X 既然是 T_1 空间, 又 X_1-X_n 是一个有限集, 可见 $\forall n\in\mathbb{N}$ 总有 $X_n'=X_1'$[见习题(三)3]. 但是, $\forall n$ 总有 $X_n\subset F_n$; 而由于每个 F_n 都是闭集, 因而下面的包含式必然成立:

$$X_n'\subset F_n'\subset F_n.$$

由此可见, $\forall n\in\mathbb{N}$, 总有 $X_1'\subset F_n$. 】

定理(1.7)中"列紧"的条件当然可以用较强的条件"紧致"去代替. 另一方面,"X 为列紧 T_1 空间"的条件如果代之以"子空间 F_1 为列紧与 T_1 的"这一条件, 定理显然也真.

满足条件(*)的任何集合序列 $\{F_n\}$(F_n 不必是闭集) 叫做一个下降序列.

(1.8) **海纳-波雷尔定理** 凡列紧 T_1 空间 X 的每个可数开覆盖 $\{U_n\}$ 都有一个有限子覆盖.

证 如果 $\{U_n\}$ 本来就是有限的, 则定理已经不用证明, 因此我们可以假定 $\{U_n\}$ 是无穷的. 令

$$S_n=U_1\cup U_2\cup\cdots\cup U_n,\quad F_n=\mathscr{C}S_n,$$

那末, 由于每个 S_n 是 X 的开集, 可见每个 F_n 都是 X 的闭集. 而且很明显, $\forall n$, 总有 $F_n\supset F_{n+1}$, 即 $\{F_n\}$ 是一个下降的闭集序列. 如果 $\forall n$, $F_n\neq\emptyset$, 则根据康托尔定理(1.7), 必定有

$$F=\bigcap_{n=1}^{\infty}F_n\neq\emptyset.$$

于是 $\mathscr{C}F\neq X$, 亦即

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}\mathscr{C}F_n=\bigcup_{n=1}^{\infty}S_n=\bigcup_{n=1}^{\infty}U_n\neq X,$$

这与 $\{U_n\}$ 是空间 X 的覆盖这一假设矛盾. 由此可见, $\exists n\in\mathbb{N}$, s. t. $F_n=\emptyset$. 因此

$$X=\mathscr{C}F_n=S_n=U_1\cup U_2\cup\cdots\cup U_n.$$

所以 $\{U_n\}$ 有一个子覆盖$(U_1, U_2, \cdots, U_n)$. ▌

3. 豪斯道夫空间的紧致集与连续函数 豪斯道夫空间的紧集、以及紧空间到豪斯道夫空间内的映射具有如下的一些重要性质.

(1.9) **定理** 如果豪斯道夫空间 X 的点集 A 是紧致的，那末，A 必须是空间 X 的闭集.

证 我们只须证明：$p\in\overline{A}\Rightarrow p\in A$，即证明 $\overline{A}\subset A$ 就成了.

$\forall$ 开集 $U_\alpha\ni p$，我们取交集 $A\cap\overline{U}_\alpha$. 设 $A\neq\emptyset$；则我们得到子空间 A 中的一族相对闭集 $\{A\cap\overline{U}_\alpha\}$. 令 $(U_{\alpha_1}, U_{\alpha_2}, \cdots, U_{\alpha_n})$为族 $\{U_\alpha\}$ 的任意的一个有限子族. 因为

$$U_{\alpha_1}\cap U_{\alpha_2}\cap\cdots\cap U_{\alpha_n}$$

是点 p 的一个开邻域，所以

$$(U_{\alpha_1}\cap U_{\alpha_2}\cap\cdots\cap U_{\alpha_n})\cap A\neq\emptyset,$$

于是就更应该有

$$(A\cap\overline{U}_{\alpha_1})\cap(A\cap\overline{U}_{\alpha_2})\cap\cdots\cap(A\cap\overline{U}_{\alpha_n})\neq\emptyset.$$

由此可见，$\{A\cap\overline{U}_\alpha\}$ 是紧致子空间 A 中具有有限交性质的一族相对闭集，因此根据定理(1.4)，$\exists$ 空间 X 的一点 q 属于所有的 $A\cap\overline{U}_\alpha$. 不难断定：$p=q$. 事实上，假定恰恰相反，$p\neq q$. 于是因为 X 是豪斯道夫空间，所以 $\exists$ 开集 $V\ni p$ 及开集 $U\ni q$, s. t. $V\cap U=\emptyset$. 由此推出，$q\notin\overline{V}$. 但是，V 既然包含 p，V 就应该是某个 U_α，比如说，是 $U_{\alpha'}$. 于是 $q\notin\overline{V}$ 就表示 $q\notin A\cap\overline{U}_{\alpha'}$. 这样，我们就引出了一个矛盾. 因此我们必须有 $p=q$；而由于 $q\in A$，我们就得到 $p\in A$. 这样一来，当 $A\neq\emptyset$ 时，我们就证明了 $\overline{A}=A$，所以 A 是 X 的闭集. 当 $A=\emptyset$ 时，A 当然是 X 的闭集. ▌

如果把定理(1.9)中 X 为 T_2 空间的条件换成 T_1 空间，则所

得命题不真.

例 6 我们取例(三) 4 中所举空间$(\mathbb{N}, \mathscr{T}^*)$为例. 我们已经知道$(\mathbb{N}, \mathscr{T}^*)$是一个$T_1$空间但不是$T_2$空间. 这个空间还是紧致的. 事实上,设$\{U_\alpha\}$是空间$(\mathbb{N}, \mathscr{T}^*)$的任意一个开覆盖. 在$\{U_\alpha\}$中任取一个开集$U_{\alpha_1}\neq\emptyset$. 于是根据定义拓扑$\mathscr{T}^*$的条件2°,

$$\exists n_0\in\mathbb{N}\ni\cdot n\geqslant n_0\Rightarrow n\in U_{\alpha_1}.$$

所以空间$(\mathbb{N}, \mathscr{T}^*)$中不属于$U_{\alpha_1}$的点最多只有$n_0-1$个. 这些点最多只需要$\{U_\alpha\}$中$n_0-1$个开集$U_{\alpha_2}, U_{\alpha_3}, \cdots, U_{\alpha_{n_0}}$就被覆盖了. 因此, $\{U_\alpha\}$有一个有限子覆盖$(U_{\alpha_1}, U_{\alpha_2}, \cdots, U_{\alpha_{n_0}})$. 由此可见, T_1空间$(\mathbb{N}, \mathscr{T}^*)$是紧致的. 仿上容易证明, 如果$(\mathbb{N}, \mathscr{T}^*)$的开集

$$U\neq\emptyset \ \wedge\ U\neq\mathbb{N},$$

则U是空间$(\mathbb{N}, \mathscr{T}^*)$的紧致集, 但$U$只开而不闭. 其实, 空间$(\mathbb{N}, \mathscr{T}^*)$的每个子集都是紧致的, 而闭集除$\mathbb{N}$以外只是$\mathbb{N}$的所有有限子集.

这个例子说明,即使是紧致T_1空间的紧致集也不必是闭集.

我们现在去证明下面两个所谓的**映射定理**.

(1.10) **定理** 设X是任意的紧致空间, 又Y是一个随意的拓扑空间. 如果f是空间X到空间Y内的一个连续函数, 则$f(X)$是空间Y的紧致集. 特别地, 当$f(X)=Y$时, 则Y是一个紧致空间.

证 设$\{F_i\}_{i\in I}$是Y的子空间$f(X)$的具有有限交性质的任意一族相对闭集. 因为函数f是连续的, 所以$\forall i\in I$, $f^{-1}(F_i)$闭于紧致空间X中. 设$(F_{i_1}, F_{i_2}, \cdots, F_{i_m})$是族$\{F_i\}_{i\in I}$的任意一个有限子族. 那末, 因为

$$F_{i_1}\cap F_{i_2}\cap\cdots\cap F_{i_m}\neq\emptyset,$$

所以

$$f^{-1}(F_{i_1})\cap f^{-1}(F_{i_2})\cap\cdots\cap f^{-1}(F_{i_m})$$
$$=f^{-1}(F_{i_1}\cap F_{i_2}\cap\cdots\cap F_{i_m})\neq\emptyset.$$

这样一来，$\{f^{-1}(F_i)\}_{i\in I}$是具有有限交性质的一族 X 的闭集，从而由 X 的紧致性推出：

$$\exists p\in X\ni\cdot p\in\bigcap_{i\in I}f^{-1}(F_i).$$

因此
$$f(p)\in\bigcap_{i\in I}F_i.$$

这就证明了$f(X)$的紧致性. ▌

如果注意到对于任何函数f总有

$$f(\emptyset)=\emptyset,$$

并且空集是任何空间的紧致集，则从（1.10）立即得到

(1.11) **系** 拓扑空间的任何紧致集的连续象都是紧致的. 因此，紧致性是一个拓扑性质.

(1.12) **定理** 紧致空间 X 到豪斯道夫空间 Y 内的任何连续函数f都是闭函数；特别地，当连续函数f是双一一函数时，它的反函数f^{-1}也必然连续，即f是一个同胚.

证 我们去证明定理的第一部分. 从命题(1.2)推出，X 的任何闭集 F 都是紧致的；由于f是连续的，从定理(1.10)的系(1.11)看出，$f(F)$必须是空间 Y 的紧致集. 因为 Y 是一个豪斯道夫空间，所以根据定理(1.9)，$f(F)$必须是空间 Y 的闭集. 因此从 X 的闭集 F 的任意性推出，f是一个闭函数.

至于定理的第二部分，这显然是定理第一部分的直接推论. 事实上，对于 X 的任何闭集 F，当f不但连续而且是双一一函数时，由于

$$(f^{-1})^{-1}(F)=f(F),$$

则见f的反函数f^{-1}反射闭集，因此f^{-1}也连续. ▌

二、紧致空间族的积空间

本节的主要内容是证明下面的吉洪诺夫(Тихонов)定理，它被认为是一般拓扑学中最重要的定理之一，而定理的证明则属于布巴基(Bourbaki)。

为了在论述上的方便起见，我们约定：当族 $\Phi=\{A_j\}_{j\in J}$ 表示一个单函数 $j\to A_j$ 时，则族 Φ 与其标示集将不加区别，于是我们同时又可以写成

$$\Phi=\{A_j\mid j\in J\}.$$

据此，集合类也可以用标号族的记号来表示。

以后凡是把"族"与"集合"当成同义词使用时都是根据这一约定来的。在吉洪诺夫定理的证明中即将援用这一约定。

(2.1) **吉洪诺夫定理** 任意一族紧致空间的积空间总是紧致的。

证* 令 $\{X_i\}_{i\in I}$ 为任意一族紧致空间，并令 $X=\prod_{i\in I}X_i$ 为这一族空间的积空间。我们希望证明：具有有限交性质的、空间 X 的闭集的任意族 Φ_0 的交集不是空集。令 $\mathscr{S}$ 为具有下列性质的一切族 Φ 所成的集合：

1° Φ 的各项是空间 X 的点集，但不必是闭集；

2° $\Phi_0\subset\Phi$；

3° Φ 具有有限交性质。

显然 $\Phi_0\in\mathscr{S}$，从而 $\mathscr{S}\neq\emptyset$(按照上述约定，我们也把 $\mathscr{S}$ 的每个元素都看成集合类)。

在 $\mathscr{S}$ 的元素 Φ_α、Φ_β、…之间定义一个二元关系 $\leqslant$ 如下：

$$\Phi_\alpha\leqslant\Phi_\beta\Leftrightarrow\Phi_\alpha\subset\Phi_\beta.$$

那末，$(\mathscr{S},\leqslant)$ 显然是一个偏序集。令

$$\mathscr{S}^* = \{\Phi_\lambda\}_{\lambda\in L}$$

表示 $\mathscr{S}$ 的一个任意全序子集. 不难断定在偏序集 $\mathscr{S}$ 中 $\mathscr{S}^*$ 有上界. 事实上, 令

$$\Phi^* = \bigcup_{\lambda\in L}\Phi_\lambda;$$

则 Φ^* 显然满足条件 1° 及 2°. 令 $\{S_1, S_2, \cdots, S_n\}$ 表示 Φ^* 的一个随意子集. 我们不妨假定 $\forall i\in A(n)$, $S_i\in\Phi_{\lambda_i}$, 而 $\Phi_{\lambda_i}\in\mathscr{S}^*$. 既然 $\mathscr{S}^*$ 是全序的, 那我们就又可以假定

$$\Phi_{\lambda_1}\subset\Phi_{\lambda_2}\subset\cdots\subset\Phi_{\lambda_n}.$$

这样一来, $\forall i\in A(n)$, $S_i\in\Phi_{\lambda_n}$; 于是由于 Φ_{λ_n} 具有有限交性质,

$$\bigcap_{i=1}^n S_i\neq\emptyset.$$

这证明了 Φ^* 具有有限交性质. 因此 $\Phi^*\in\mathscr{S}$. 根据 $\mathscr{S}$ 中偏序关系 $\leqslant$ 的定义, 我们立即看出, Φ^* 是全序集 $\mathscr{S}^*$ 的一个上界. 于是援引定义(0.6.8), 我们知道 $\mathscr{S}$ 是一个归纳集. 根据卓伦引理(0.6.10), $\mathscr{S}$ 有一个极大元 Φ_1. 不难看出:

(a) $S\in\mathscr{P}(X)-\Phi_1\Rightarrow\exists(A_1, A_2, \cdots, A_n)\in\Phi_1^n\ni\cdot$

$$S\cap A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n=\emptyset;$$

因为否则将有 $\Phi_1\cup\{S\}\in\mathscr{S}$, 而且 $\Phi_1\subset\Phi_1\cup\{S\}$, $\Phi_1\neq\Phi_1\cup\{S\}$, 这与 Φ_1 的极大性矛盾.

(b) Φ_1 中元素的任意有限交必须是 Φ_1 的元素; 事实上, 如果 $B_1, B_2, \cdots, B_m$ 是 Φ_1 的任意 m 个(有限个)元素, 则随意从 Φ_1 中取出 n 个元素 $A_1, A_2, \cdots, A_n$, 总有

$$(B_1\cap B_2\cap\cdots\cap B_m)\cap A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n\neq\emptyset.$$

因此根据(a), 我们有 $B_1\cap B_2\cap\cdots\cap B_m\in\Phi_1$.

(c) $T\in\mathscr{P}(X)\ni\cdot\forall A\in\Phi_1$, $T\cap A\neq\emptyset\Rightarrow T\in\Phi_1$; 这是因为根据(a)

$$T\notin\Phi_1\Rightarrow\exists(A_1, A_2, \cdots, A_n)\in\Phi_1^n\ni\cdot$$

$$T\cap(A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n)=\emptyset;$$

但是根据(b)，$A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n \in \Phi_1$，若令

$$A = A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n,$$

则见 $$T \notin \Phi_1 \Rightarrow \exists A \in \Phi_1 \ni \cdot T \cap A = \emptyset.$$

令 p_i 为积空间 X 到坐标空间 X_i 上的投影. 试看闭集族$\{\overline{p_i(A)}\}_{A \in \Phi_1}$，并从其中随意取出一个有限子族

$$(\overline{p_i(A_1)},\ \overline{p_i(A_2)},\ \cdots,\ \overline{p_i(A_n)}),$$

于此，$\forall k \in \Delta(n)$，$A_k \in \Phi_1$. 因为 Φ_1 具有有限交性质，所以

$$\exists q \in X \ni \cdot q \in A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n.$$

因此可见

$$p_i(q) \in p_i(A_1) \cap p_i(A_2) \cap \cdots \cap p_i(A_n)$$
$$\subset \overline{p_i(A_1)} \cap \overline{p_i(A_2)} \cap \cdots \cap \overline{p_i(A_n)}.$$

所以族 $\{\overline{p_i(A)}\}_{A \in \Phi_1}$ 具有有限交性质. 既然空间 X_i 是紧致的，那就必然 $\exists x_i \in X_i \ni \cdot \forall A \in \Phi_1$ 总有 $x_i \in \overline{p_i(A)}$. 令 $x = \{x_i\}_{i \in I}$; 则 $x \in X$.

我们去证明 x 属于 Φ_0 的一切元素. 为此，我们只须证明：

$$\forall A \in \Phi_1,\ \text{总有}\quad x \in \overline{A}.$$

事实上. 令 U 为空间 X 中点 x 的任一开邻域. 那末，$\exists X$ 的开集 $V \ni x \wedge V \subset U$, s. t.

$$V = p_{i_1}^{-1}(U_{i_1}) \cap p_{i_2}^{-1}(U_{i_2}) \cap \cdots \cap p_{i_n}^{-1}(U_{i_n}).$$

其中 U_{i_k} 是空间 X_{i_k} 的开集. 不难断定，$V \in \Phi_1$. 事实上，$\forall A \in \Phi_1$，既然总有

$$x_{i_k} \in \overline{p_{i_k}(A)} \cap U_{i_k},$$

于此，x_{i_k} 为点 x 的 i_k 坐标，那末，显而易见，$\forall A \in \Phi_1$，就必然有

$$U_{i_k} \cap p_{i_k}(A) \neq \emptyset.$$

令 $y \in U_{i_k} \cap p_{i_k}(A)$；则

$$p_{i_k}^{-1}(y) \subset p_{i_k}^{-1}(U_{i_k}) \wedge p_{i_k}^{-1}(y) \cap A \neq \emptyset.$$

于是 $\forall A \in \Phi_1$，常有

$$p_{i_k}^{-1}(U_{i_k})\cap A\neq\emptyset.$$

因此根据(c)，$p_{i_k}^{-1}(U_{i_k})\in\Phi_1$；又根据(b)，$V\in\Phi_1$. 这样一来，$\forall A\in\Phi_1$，总有$V\cap A\neq\emptyset$，于是更有$U\cap A\neq\emptyset$. 这证明了$\forall A\in\Phi_1$，总有$x\in\overline{A}$. 最后令$F$为$\Phi_0$的任意元素；则$F\in\Phi_1$且$F$闭于积空间$X$中. 因此$x\in\overline{F}=F$. 这证明了$x$属于$\Phi_0$的一切元素. 由此，根据定理(1.4)我们立即看出X是一个紧致空间. ▌

下面的两个命题是吉洪诺夫定理(2.1)的直接推论.

(2.2) 任意一个紧致豪斯道夫空间族的积空间是一个紧致豪斯道夫空间. 因此，紧致豪斯道夫空间族的积空间的点集A是紧致的$\Leftrightarrow A$是闭集.

证 命题的第一部分直接由定理(2.1)及(3.2.3)推出. 命题的第二部分则直接由第一部分、定理(1.9)及(1.2)推出. ▌

(2.3) 如果$\{X_i\}$是一个紧致豪斯道夫空间族，那末，每个投影p_i都是积空间

$$X=\prod_i X_i$$

到坐标空间X_i的闭函数.

证 这是定理(2.1)及(1.12)的直接推论. ▌

根据定理(1.6.17)，任何积空间到每个坐标空间的投影都是开函数. 因此，当每个坐标空间都是紧致豪斯道夫空间时，每个投影既是开函数又是闭函数.

三、覆盖式与序列式列紧性·各种紧致性之间的关系

本节作为第一节的继续，将引入另外两种紧致性并按照江

泽涵[①]的译名及命名称为"序列式"与"覆盖式"列紧性，也就是"序列式"与"可数覆盖式"的紧致性．这样一来，我们就有了四种紧致性，它们将在空间满足第二可数性公理及弗莱歇分离公理的条件下统一起来，从而显示出这两个公理的重要意义．

由于今后将一再用到第一与第二这两个可数性公理，为了行文的简便计，我们同样遵循江泽涵教授在《拓扑学引论》书上所述，把它们分别简称为公理 A_1 与公理 A_2.

1．覆盖式列紧空间 我们在下面以海纳-波雷尔定理(1.8)的结论作为条件来定义"覆盖式列紧性".

(3.1) **定义** 如果拓扑空间 X 的每一个可数开覆盖都有一个有限子覆盖，那末，X 就叫做一个**覆盖式列紧空间**．如果一个随意拓扑空间 X 的子空间 A 是覆盖式列紧的，则 A 称为空间 X 的**覆盖式列紧集**.

我们约定：空集是任何拓扑空间的覆盖式列紧集.

根据定义(3.1)，定理(1.8)可以改写如下：

(3.2) 每个列紧 T_1 空间都是覆盖式列紧的.

一般说来，列紧空间不一定是覆盖式列紧的，在例5中我们已经指明了这一点．因为在那个例子里，$(\mathbb{N}, \mathscr{T}_*)$ 是一个列紧空间，$\{A(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是空间 $(\mathbb{N}, \mathscr{T}_*)$ 的一个可数开覆盖，可是它没有有限子覆盖.

下面的命题说明，覆盖式列紧性强于列紧性.

---

① 江泽涵，《拓扑学引论》，上海科学技术出版社，1978.

关于各种紧致性的命名和汉语译名在各种有关文献中常有出入：本书中的"列紧性"，英语文献中往往称为"countable compactness"，而按科学出版社1974年版的《英汉数学词汇》，则被译为"可数紧性"．又本节中所定义的"覆盖式列紧性"中文文献中也常称为"可数紧性"，关于这一命名的英文文献见：J. L. Kelley, General Topology (1955)，或 J. Nagata, Modern General Topology (1974).

(3.3) 每一个覆盖式列紧空间都是列紧的.

证 如果∃一个覆盖式列紧空间 X，它不是列紧的，则 X 必须有一个可数无穷点集

$$A=\{x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots\} \quad \text{s. t. } A'=\emptyset.$$

这样一来，由于 A 是闭集，因而 $U_0=\mathscr{C}A$ 是开集；又

$$\forall m\in\mathbb{N}\exists \text{ 开集 } U_m\ni x_m, \text{ s. t. } U_m\cap(A-\{x_m\})=\emptyset.$$

于是得到覆盖式列紧空间 X 的一个可数开覆盖

$$(U_0, U_1, U_2, \cdots, U_n, \cdots),$$

它显然没有有限子覆盖. 这是不可能的. ▌

由(3.2)与(3.3)立即推出：

(3.4) 对于 T_1 空间，覆盖式列紧性 ⇔ 列紧性.

显而易见：

(3.5) 每个紧致空间都是覆盖式列紧的.

命题(3.5)的逆命题不真，即紧致性强于覆盖式列紧性. 反例需要较多预备知识，已超出本书范围，故从略①.

下面的定理告诉我们，如果把康托尔定理(1.7)中的"列紧 T_1"这个条件去掉，则剩下的部分可作为条件来给覆盖式列紧性下一个新的定义.

(3.6) **定理** 拓扑空间 X 是覆盖式列紧的 ⇔ X 中非空闭集的任何下降序列 $\{F_n\}$ 都有非空的交集：

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n\neq\emptyset.$$

证 ⇒. 假定恰恰相反，$\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n=\emptyset$. 那末，根据笛·摩尔根定律，我们有 $\bigcup_{n=1}^{\infty}\mathscr{C}F_n=X$. 令 $U_n=\mathscr{C}F_n$. 于是 $\{U_n\}$ 是 X 的一个可数开覆盖，依假设，$\{U_n\}$ 有一个有限子覆盖 $(U_{n_1}, U_{n_2}, \cdots, U_{n_k})$. 不妨设 $n_1<n_2<\cdots<n_k$. 于是 $\bigcup_{i=1}^{k} U_{n_i}=U_{n_k}$. 因此，$U_{n_k}=X$，从而 $F_{n_k}=\mathscr{C}U_{n_k}=\emptyset$，与所设矛盾.

① 可参考 J. L. Kelley, General Topology, p. 163.

$\Leftarrow$. 充分性的证明实际上就是定理(1.8)的证明，只须注意到，后者根据"空间 X 为列紧 T_1"的条件而援引了定理(1.7)的结论，而它现在已经成为我们的已知条件. 】

定理(3.6)中的条件称为**康托尔条件**. 因此定理(1.7)可以重新表述为：任何列紧 T_1 空间都满足康托尔条件；定理(3.6)可以重新表述为：空间 X 是覆盖式列紧的 $\Leftrightarrow$ X 满足康托尔条件.

2. 序列式列紧空间 我们现在去定义空间的序列式列紧性.

(3.7) **定义** 令 X 为任意的一个拓扑空间. 如果 X 中的每个序列都有一个收敛的子序列，那末，空间 X 就叫做**序列式列紧的**.

拓扑空间的**序列式列紧集**可以仿照覆盖式列紧集来定义.

(3.8) 任何序列式列紧空间都是覆盖式列紧的.

证 我们只须根据定理(3.6)证明任何序列式列紧空间 X 满足康托尔条件. 为此，令 $\{F_n\}$ 为 X 中非空闭集的任一下降序列. $\forall n\in\mathbb{N}$, 任取一点 $x_n\in F_n$, 于是得到 X 中的一个序列 $\{x_n\}$. 根据定义(3.7), $\{x_n\}$ 有一个收敛子序列 $\{x_{n_i}\}$. 设 $\lim\limits_{i\to\infty} x_{n_i}=x$, $x\in X$. 自然数列 $\{n_i\}$ 既然是严格递增的，那末，

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad \exists k\in\mathbb{N}\ni\cdot i\geqslant k\Rightarrow n_i>n.$$

由于闭集序列 $\{F_n\}$ 是下降的，我们看出

$$i\geqslant k\Rightarrow F_{n_i}\subset F_n.$$

但是 $\forall i\in\mathbb{N}$, $x_{n_i}\in F_{n_i}$. 因此

$$i\geqslant k\Rightarrow x_{n_i}\in F_n.$$

由此可见 $\forall n\in\mathbb{N}$, $x\in\overline{F}_n=F_n$, 即 $x\in\bigcap_n F_n$. 】

由(3.3)与(3.8)立即推出：

(3.9) 任何序列式列紧空间都是列紧的.

命题(3.9)的逆命题不真，即并非每个列紧空间都是序列式列紧的.

例 7 我们在例 5 中已经指出，空间$(\mathbb{N}, \mathscr{T}_*)$是列紧的，但它显然不是序列式列紧空间，因为自然数列$\{n\}$就没有在空间$(\mathbb{N}, \mathscr{T}_*)$中收敛的子序列.

由此可见，序列式列紧性强于列紧性. 可以举例说明，覆盖式列紧性 $\nRightarrow$ 序列式列紧性，甚至紧致性也不蕴含序列式列紧性. 因此，序列式列紧性也强于覆盖式列紧性.

(3.10) **引理** 如果 X 是满足公理 A_1 的列紧 T_1 空间，那末，X 必须是一个序列式列紧空间.

证 令$\{x_n\}$为空间 X 中的任一序列，并令

$$A=\{x_n | n\in\mathbb{N}\}.$$

如果 A 是一个有限集，则至少有$\{x_n\}$的一个项，比如说 $x=x_h$，在$\{x_n\}$中出现无穷多次. 另一方面，如果 A 是一个无穷集，那末，因为 X 是列紧的，所以 A 有一个聚点 x. 无论在什么情形下，总 $\exists$ 空间 X 的一个点 x, s. t. $\forall x$ 的邻域 V，$\exists$ 无穷多个 $n\in\mathbb{N}$, s. t. $x_n\in V$. 因为空间 X 满足公理 A_1，所以从定理(3.3.5)推出，$\exists$ 空间 X 在点 x 处的一个可数基$\{W_n\}$, s. t.

$$\forall n\in\mathbb{N},\ 总有\quad W_{n+1}\subset W_n.$$

令 n_1 为任一标数，s. t. $x_{n_1}\in W_1$. 设标数 n_k 及$\{x_n\}$的一项 $x_{n_k}\in W_k$ 已经确定，而令 $n_{k+1}>n_k$ 为一标数，s. t. $x_{n_{k+1}}\in W_{k+1}$. 于是我们得到自然数的一个严格递增数列$\{n_k\}$以及与之相应的一个序列$\{y_k\}$，其中 $\forall k\in\mathbb{N}$, $y_k=x_{n_k}$.

显而易见，$\{y_k\}$是序列$\{x_n\}$的一个子序列，并且

$$\lim_{k\to\infty} y_k=x.$$

因此空间 X 是序列式列紧的. ∎

由此立即得到下面的

(3.11) **定理** 对于满足公理 A_1 的 T_1 空间，列紧性 $\Leftrightarrow$ 序列式列紧性 $\Leftrightarrow$ 覆盖式列紧性.

证 对于满足公理 A_1 的 T_1 空间 X，列紧性 $\Leftrightarrow$ 序列式列紧性这一事实，直接由引理(3.10)及(3.9)推出. 至于在 X 中，列紧性 $\Leftrightarrow$ 覆盖式列紧性，这就是命题(3.4)，而且空间 X 满足公理 A_1 的假设是多余的. 由此可见，在所设条件下，列紧性、覆盖式列紧性与序列式列紧性两两等价. ▌

由引理(3.10)立即推出：

(3.12) 如果满足公理 A_1 的 T_1 空间 X 是紧致的，则 X 是序列式列紧的①.

我们现在去解决在什么条件下紧致性与三种列紧性等价的问题. 在这里我们用得着公理 A_2.

(3.13) **引理** 对于满足公理 A_2 的空间，覆盖式列紧性 $\Rightarrow$ 紧致性.

证 设 X 是任意的一个满足公理 A_2 的覆盖式列紧空间，并设 $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ 是空间 X 的一个随意开覆盖. 那末，根据林德略夫定理(3.4.6)，$\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ 有一个可数子覆盖 $\{U_{\alpha_n}\}$. 但是 X 是覆盖式列紧的；所以 X 的可数开覆盖 $\{U_{\alpha_n}\}$ 又有一个有限子覆盖 $(U_{\beta_1}, U_{\beta_2}, \cdots, U_{\beta_m})$，其中

$$\forall k\in A(m),\ \exists n\in\mathbb{N},\ \text{s. t. }\beta_k=\alpha_n.$$

显然每个 $\beta_k\in I$，所以 $(U_{\beta_1}, U_{\beta_2}, \cdots, U_{\beta_m})$ 又是 X 的开覆盖 $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ 的有限子覆盖. 由 X 的开覆盖 $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ 的随意性看出，空间 X 是紧致的. ▌

---

① 命题(3.12)的逆命题不成立，甚至把 T_1 加强到 T_2 也不成，即对于满足公理 A_1 的 T_2 空间，

序列式列紧性 $\nRightarrow$ 紧致性.

见前面引过的参考书 J. L. Kelley, General Topology, p. 163.

由(3.5)与引理(3.13)立即推出：

(3.14) 对于满足公理 A_2 的空间，紧致性 ⇔ 覆盖式列紧性.

如果我们注意到满足公理 A_2 的空间必然也满足公理 A_1，我们立即推得下面的

(3.15) **定理** 对于满足公理 A_2 的 T_1 空间，紧致性 ⇔ 覆盖式列紧性 ⇔ 列紧性 ⇔ 序列式列紧性.

证 这是(3.14)与定理(3.11)的直接推论. ▌

四、局部紧致性

本节将着重阐述"局部紧致的"豪斯道夫空间的性质，主要定理是(4.5). 我们先在下面给出拓扑空间的"局部紧致性"的一般性定义，并由此得出它的几个简单推论.

(4.1) **定义** 设 X 是一个随意给定的拓扑空间. 如果 X 的每个点都有一个紧致邻域，则 X 就叫做一个局部紧致空间.

下面的命题是定义(4.1)的一个直接推论.

(4.2) 每个紧致空间都是局部紧致的.

证 事实上，如果 X 是一个随意的紧致空间，则 X 作为空间 X 的点集是它的每一个点的紧致邻域. ▌

命题(4.2)的逆命题显然不真，现在举例说明如下：

例 8 $\forall x\in\mathbb{R}$, 取 a, $b\in\mathbb{R}$, s. t. $a<x<b$. 在例 2 中我们已经知道有界闭区间 $[a, b]$ 是实直线 $\mathbb{R}$ 的一个紧致集，而且它也是点 x 的一个邻域. 因此根据定义(4.1)，实直线 $\mathbb{R}$ 是一个局部紧致空间. 另一方面，例 3 告诉我们，实直线 $\mathbb{R}$ 不是紧致的.

下面的命题也是很明显的.

(4.3) 设 X 是一个豪斯道夫空间. X 是局部紧致的 ⇔ X

的每一点都有一个邻域，它的闭包是紧致的。

证 条件的充分性是十分明显的，并且 X 是豪斯道夫空间的条件也是多余的。现在证明条件的必要性：令 N_x 为空间 X 中的任意一点 x 的一个紧致邻域。那末，根据定理(1.9)，N_x 是 T_2 空间 X 的闭集，因此 $\overline{N}_x=N_x$。所以 X 的任一点 x 都有一个邻域 N_x 它的闭包 $\overline{N}_x$ 是紧致的。▌

关于局部紧致的 T_2 空间，我们还有下面的判别准则：

(4.4) **定理** 设 X 是一个豪斯道夫空间。那末，X 是局部紧致的 $\Leftrightarrow$ X 的拓扑 $\mathscr{T}$ 有一个基，它的每个元素的闭包都是紧致的。

证 $\Leftarrow$. 这是明显的，而且 X 是 T_2 空间的假设也不必要。

$\Rightarrow$. 设 $\mathscr{B}=\{U_\alpha\}$ 是局部紧致空间 X 的拓扑 $\mathscr{T}$ 的一个基。令

$$\mathscr{S}=\{V_\beta\in\mathscr{T}\mid\overline{V}_\beta \text{ 是 } X \text{ 的紧致集}\},$$

因为 $\forall U_\alpha\in\mathscr{B}\wedge\forall V_\beta\in\mathscr{S}$，$\overline{U_\alpha\cap V_\beta}\subset\overline{V}_\beta$，而 $\overline{V}_\beta$ 是紧致的，所以从(1.2)看出，$\overline{U_\alpha\cap V_\beta}$ 是紧致的。令 $W\in\mathscr{T}$ 又 $x\in W$。那末，因为 $\mathscr{B}$ 是拓扑 $\mathscr{T}$ 的基，所以

$$\exists U_\alpha\in\mathscr{B}\ni\cdot x\in U_\alpha\subset W.$$

既然 X 是局部紧致的 T_2 空间，由命题(4.3)我们立即看出

$$\exists V_\beta\in\mathscr{S}\ni\cdot x\in V_\beta.$$

于是
$$x\in U_\alpha\cap V_\beta\wedge U_\alpha\cap V_\beta\subset W.$$

由于点 x 与开集 W 都是随意的，可见 $\{U_\alpha\cap V_\beta\}$ 是拓扑 $\mathscr{T}$ 的一个基，它的每个元素的闭包都是紧致的。▌

关于局部紧致豪斯道夫空间，除了定理(4.4)外，我们还有下面的有趣的判别准则。

(4.5) **定理** 豪斯道夫空间 X 是局部紧致的 $\Leftrightarrow\exists$ 满足下面两个条件的紧致豪斯道夫空间 X^*：

1° $X\subset X^*$, $X^*-X=\{p\}$;

2° X 是空间 X^* 的一个开集.

证* $\Rightarrow$. 设 p 是不属于局部紧致 T_2 空间 X 的任意对象，并令 $X^*=X\cup\{p\}$. 现在让我们按照习题(一)X 来定义集合 X^* 上的一个 C-拓扑 $\mathscr{F}^*$ 如下：设 $\mathscr{F}$ 是 X 上的拓扑 $\mathscr{T}$ 所导致的 X 上的 C-拓扑. 我们作如下规定：

I. A 是 X 的紧致集 $\Rightarrow A\in\mathscr{F}^*$;

II. $F\in\mathscr{F}\Rightarrow F\cup\{p\}\in\mathscr{F}^*$;

III. $\mathscr{F}^*$ 除 I、II 两条所规定的集合外，不包含其他任何元素.

显然，按照集合类 $\mathscr{F}^*$ 的定义，我们有 $\emptyset\in\mathscr{F}^*$, $X^*\in\mathscr{F}^*$. 不难断定：

$$F^*\in\mathscr{F}^*\wedge G^*\in\mathscr{F}^*\Rightarrow F^*\cup G^*\in\mathscr{F}^*. \tag{α}$$

为了证明这个，我们分下面三种情形来讨论：

a) F^* 与 G^* 都是空间 X 的紧致集. 如此，则 $F^*\cup G^*$ 也是 X 的紧致集，因此根据 I, $F^*\cup G^*\in\mathscr{F}^*$.

b) F^* 是 X 的紧致集，而 $G^*=G\cup\{p\}$, 于此 $G\in\mathscr{F}$. 如此，由于 X 是 T_2 空间，根据定理(1.9), $F^*\in\mathscr{F}$, 又根据定理(1.4.2)的性质 4°, 我们有 $F^*\cup G\in\mathscr{F}$; 由此根据 II

$$F^*\cup G^*=(F^*\cup G)\cup\{p\}\in\mathscr{F}^*.$$

c) $F^*=F\cup\{p\}$, $G^*=G\cup\{p\}$, 其中 $F\in\mathscr{F}$, $G\in\mathscr{F}$. 这时由于 $F\cup G\in\mathscr{F}$, 根据 II, 我们有

$$F^*\cup G^*=(F\cup G)\cup\{p\}\in\mathscr{F}^*.$$

根据 III, 我们知道除了这三种情形外，再也没有其他情形发生，因此命题(α)就证明了. 运用数学归纳法，我们立即推出，$\mathscr{F}^*$ 中元素的任意有限并仍然是 $\mathscr{F}^*$ 的元素. 于是习题(一)X 中的闭集公理 C_1 满足.

现在假定$\{F_\alpha^*\}$是$\mathscr{F}^*$中元素的一个任意族. 那末，容易看出 $\bigcap_\alpha F_\alpha^*\in\mathscr{F}^*$. 这是因为：

1) 如果 $\forall\alpha$, F_α^* 都是空间 X 的紧致集，则交集 $\bigcap_\alpha F_\alpha^*$ 显然是紧致的，因此，$\bigcap_\alpha F_\alpha^*\in\mathscr{F}^*$.

2) 令 F_β^* 为 $\{F_\alpha^*\}$ 的一个项，使得 $F_\beta^*=F_\beta\cup\{p\}$, 其中 $F_\beta\in\mathscr{F}$. 那末，一切这样的 F_β^* 构成 $\{F_\alpha^*\}$ 的一个子族 $\{F_\beta^*\}$. 令

$$\{F_\gamma^*\}=\{F_\alpha^*\}-\{F_\beta^*\}.$$

于是
$$\bigcap_\alpha F_\alpha^*=[\bigcap_\beta(F_\beta\cup\{p\})]\cap(\bigcap_\gamma F_\gamma^*),$$

其中每个 F_γ^* 都是 T_2 空间 X 的紧致集，因而 $F_\gamma^*\in\mathscr{F}$. 显而易见，$\bigcap_\alpha F_\alpha^*$ 或者是单元集 $\{p\}$ 与 X 的某一个闭集的并集，或者是 X 的一个紧致集，因此它必须属于 $\mathscr{F}^*$.

这样一来，闭集公理 C_2 也满足. 因此，$\mathscr{F}^*$ 的确是集合 X^* 上的一个 C-拓扑，而由 C-拓扑空间$(X^*, \mathscr{F}^*)$所转化的拓扑空间，将记作$(X^*, \mathscr{T}^*)$，其中 $\mathscr{T}^*$ 是由 C-拓扑 $\mathscr{F}^*$ 所导致的拓扑:

$$\mathscr{T}^*=\{U^*\in\mathscr{P}(X^*)\mid\exists F^*\in\mathscr{F}^*\ni\cdot U^*=X^*-F^*\}.$$

我们以后提到拓扑空间 X^* 的时候，指的就是空间$(X^*, \mathscr{T}^*)$.

因为 $\emptyset\in\mathscr{F}$, 所以从 II 看出，$\{p\}\in\mathscr{F}^*$, 换句话说，单元集 $\{p\}$ 是空间 X^* 的闭集，因此，由 X^* 的构造可知，X 是空间 X^* 的开集.

我们去证明，X^* 是一个豪斯道夫空间. 为此，我们首先看出，空间 X 的所有开集也都是空间 X^* 的开集. 既然 X 是一个 T_2 空间，那末，为了证明 X^* 也是这样的空间，我们只须证明，$\forall x\in X$, $\exists X^*$ 的开集 U 与 V, s. t.

$$p\in U,\quad x\in V,\quad U\cap V=\emptyset.$$

事实上，因为空间 X 是局部紧致的，所以点 x 在空间 X 中有一个紧致邻域 N_x. 于是由 I 可知，$N_x\in\mathscr{F}^*$, 因此

$$N_p^*=X^*-N_x\in\mathscr{T}^*.$$

但是 $p\notin N_x$; 所以 $p\in N_p^*$, 从而 N_p^* 是空间 X^* 中点 p 的一个邻域，并且

$$N_x\cap N_p^*=\emptyset.$$

由此可见，X^* 是一个 T_2 空间.

我们现在去证明，空间 X^* 是紧致的. 为此，任取空间 X^* 的一个开覆盖 $\{U_\alpha\}$，则必 $\exists\alpha_0\ni\cdot p\in U_{\alpha_0}$. 因为 $X^*-U_{\alpha_0}$ 不包含点 p 并且闭于空间 X^* 中，所以根据空间 X^* 的闭集的定义，我们看出，$X^*-U_{\alpha_0}$ 是空间 X 的一个紧致集. 很明显，$X^*-U_{\alpha_0}$ 被 $\{U_\alpha\}$ 中除 U_{α_0} 以外的其余 U_α 所覆盖. 从 $\{U_\alpha\}-\{U_{\alpha_0}\}$ 中取出 $X^*-U_{\alpha_0}$ 的一个有限覆盖 $\{U_{\alpha_k}\}_{1\leqslant k\leqslant n}$, 那末，$\{U_{\alpha_k}\}_{0\leqslant k\leqslant n}$ 显然是空间 X^* 的一个有限覆盖，它是开覆盖 $\{U_\alpha\}$ 的一个子覆盖. 由此可见，空间 X^* 是紧致的. 这样，我们就证明了条件是必要的.

$\Leftarrow$. 设条件满足. 那末，因为 X 是 T_2 空间 X^* 的子空间，所以根据 (3.2.2)，X 也是一个 T_2 空间. 既然 X^* 是豪斯道夫空间，根据命题 (3.2.1)

$$\forall x\in X,\ \exists U\in\mathscr{T}^*, \text{s. t. } x\in U,\ \overline{U}\subset X.$$

由于 $\overline{U}$ 是紧致空间 X^* 的闭集，根据(1.2)，$\overline{U}$ 必须是空间 X^* 的紧致集. 很明显，$\overline{U}\in\mathscr{T}$ 而且 $\overline{U}$ 也同时是空间 X 的紧致集. 这样一来，空间 X 的每一点 x 都有一个 X 中的紧致邻域 $\overline{U}$，因此 X 是一个局部紧致空间，所以条件也是充分的. ▌

例 9 我们知道复数平面 $\mathbb{C}$ 与二维欧氏空间 $\mathbb{R}^2$ 同胚：$\mathbb{C}\approx\mathbb{R}^2$. $\mathbb{C}$ 与 $\mathbb{R}^2$ 一样，都是局部紧致的豪斯道夫空间，但不是紧致的. 在《复变函数论》中我们已经知道，在空间 $\mathbb{C}$ 中加进一个新元素——无穷远点 ∞，则所得空间 $\mathbb{C}^*=\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ 与二维球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 同胚(利用球极投影，使 $\mathbb{C}^*$ 中的点 ∞ 与北极$(0,\ 0,\ 1)$对应)，从而知道 $\mathbb{C}^*$ 是紧致的. 我们还知道，在空间 $\mathbb{C}^*$ 中 $\mathbb{C}$ 为开集. 定理(4.5)就是从这一事实推广得来的.

五、紧致度量空间·函数的一致连续性

本节将讨论在度量空间中紧致性与三种列紧性、以及紧致性与其他某些拓扑性质和一些度量性质之间的关系. 此外，我们还要把《数学分析》中一致连续函数的概念推广到度量空间中去.

1. 紧致度量空间与度量空间的紧致集 度量空间虽然不必满足公理 A_2，但是例(三) 5 和例(三) 6 告诉我们，每个度量空间都是满足公理 A_1 的 T_2 空间，因此也都是满足公理 A_1 的 T_1 空间. 于是下面的引理就成为定理(3.11)的直接推论.

(5.1) **引理** 对于任何度量空间，列紧性 $\Leftrightarrow$ 序列式列紧性 $\Leftrightarrow$ 覆盖式列紧性.

为了弄清楚在度量空间中紧致性与三种列紧性的关系，让我们先去证明下面的引理，它在第三章第五节的基础上已变得十分明显.

(5.2) **引理** 每个序列式列紧度量空间都是完全的与完全

有界的，因而都满足公理 A_2.

证 设 X 是一个任意给定的序列式列紧空间. 我们首先去证明 X 是完全有界的. 根据定义(3.7), X 中的每个序列都有一个收敛的子序列. 但是根据命题(2.3.3)和定义(2.3.4), 既然凡是收敛序列都是柯西序列, 可见 X 中的每个序列都有一个柯西子序列. 于是从定理(3.5.12)推出, X 是完全有界的. 度量空间 X 的完全性直接由定义(3.7)与定理(3.5.13)推得. 最后我们去证明: 序列式列紧度量空间 X 满足公理 A_2. 由刚才证得的结果知道 X 是一个完全有界空间; 于是由(3.5.16)立即看出, X 满足公理 A_2. ▌

(5.3) **定理** 对于任何度量空间, 紧致性 ⇔ 序列式列紧性 ⇔ 覆盖式列紧性 ⇔ 列紧性.

证 鉴于引理(5.1), 我们只须证明: 对于任何度量空间, 紧致性 ⇔ 序列式列紧性. 因为任何度量空间都是满足公理 A_1 的 T_1 空间, 所以(3.12)告诉我们, 对于任何度量空间, 紧致性 ⇒ 序列式列紧性. 反之, 由(5.1)看出, 序列式列紧性 ⇒ 覆盖式列紧性. 但由引理(5.2), 度量空间的序列式列紧性 ⇒ 空间满足公理 A_2; 然后援引(3.13), 我们看出, 对于任何度量空间, 序列式列紧性 ⇒ {覆盖式列紧性及空间满足公理 A_2} ⇒ 紧致性. ▌

这样一来, 对于任何度量空间, 紧致性与三种列紧性两两等价.

根据定理(5.3), 引理(5.2)可以重述如下:

(5.4) **系** 每个紧致度量空间都是一个完全有界的完全空间, 因而都是可分的.

系(5.4)的逆命题也真, 并且不需要可分性的条件.

(5.5) 度量空间 X 是紧致的 ⇔ X 是完全有界的和完全的.

证　必要性就是(5.4)．反之，因 X 是完全有界的，故由定理(3.5.12)看出，X 中的每个序列都有一个柯西子序列，它由于空间 X 的完全性必须收敛．所以 X 是序列式列紧的，于是根据定理(5.3)，X 是紧致的．这证明了条件的充分性．】

定理(5.5)告诉我们，完全有界性和完全性这样两个度量性质，合起来就成了一个拓扑性质——紧致性．

现在让我们来看度量空间的紧致集．显而易见：

(5.6)　凡是度量空间的紧致集都是完全有界的闭集．

证　事实上，如果度量空间 X 的紧致集 $A=\emptyset$，则已不用证明．如果 $A\neq\emptyset$，则由于 X 是一个 T_2 空间，所以根据定理(1.9)，A 必须是闭集；至于 A 是完全有界的，则直接由系(5.4)推出．】

(5.7)　系　凡是度量空间的紧致集都是有界闭集．

证　这直接由(3.5.5)与(5.6)推出．】

命题(5.6)的逆命题不真，从而(5.7)的逆命题当然也不真．

例 10　取实数 $a<c<b$；令

$$X=]a,\ b[,\ A=]a,\ c].$$

作为实数直线 $\mathbb{R}$ 的度量子空间，X 是完全有界的，而 A 是空间 X 的一个完全有界的闭集，但 A 不是 X 的紧致集．

但如果度量空间是完全的，则(5.6)的逆命题成立．

(5.8)　设 X 是一个完全空间，又 $A\subset X$．那末，A 是紧致的 $\Leftrightarrow A$ 是空间 X 的完全有界闭集．

证　这是定理(2.3.7)、(5.6)和(5.5)的直接推论．】

然而即令度量空间是完全的，(5.7)的逆命题也不真．

例 11　取例(三)12 中希尔伯特空间 H^ω 的子集 X 为例．在那里我们已经指出，X 是有界的但非完全有界．又因 $X'=\emptyset$，所以 X 是完全空间 H^ω 的闭集，但不是紧致的．

(5.9)　设 X 是一个紧致度量空间，又 $A\subset X$．那末，A 是紧

致的 $\Leftrightarrow A$ 是空间 X 的闭集.

证　这是命题(5.4)、(3.5.6)与(5.8)的直接推论①. ▌

2. 紧致度量空间的连通性　我们在第二章第三节第1款的末尾曾经指出,定理(2.3.2)的逆命题不真(见例(二)6),并且还指出,要使这个逆命题成立,必须另加条件. 这个条件就是度量空间的紧致性.

(5.10)　如果 (X, d) 是一个紧致度量空间,并且 $\forall \varepsilon>0$, 空间 X 的任意一对点都能够用 X 中的一条 ε-链连结起来,那末,X 必然是一个连通空间.

证　假定恰恰相反,空间 X 不是连通的. 那末, X 就可以表示成两个非空闭集 A、B 的分离并:

$$X=A\coprod B.$$

既然 $A\neq\emptyset$, $B\neq\emptyset$, 那就 $\exists$ 点 $a\in A$ 以及点 $b\in B$. 根据定理的假设, $\forall \varepsilon>0$, a 与 b 总能够用 X 中的一条 ε-链连结起来. 在每一条这样的 ε-链里,由于第一项 $a\in A$, 最后一项 $b\in B$, 因此必然有两个相邻的项,其中的一个属于 A, 另外的一个属于 B. 于是 $\forall n\in\mathbb{N}$, $\exists p_n\in A$, $q_n\in B$, s. t.

$$d(p_n, q_n)<\frac{1}{n}.$$

如果序列 $\{p_n\}$ 只有有限多个项是相异的,那末, $\{p_n\}$ 必定至少有一个项,比如说 p, 应该在序列 $\{p_n\}$ 中重复无穷多次;于是对于无穷多个 n, 我们都会有

$$d(p, q_n)<\frac{1}{n}.$$

由此可见, $d(p, B)=0$. 因此根据 (3.5.3), $p\in\overline{B}=B$, 从而

① 命题(5.9)也是定理(1.9)与(1.2)的直接推论.

$A\cap B\neq\emptyset$, 与所设 A 和 B 不相交矛盾. 所以集合

$$M=\{x\in X \mid \exists n\in\mathbb{N}\ni\cdot x=p_n\}$$

是一个无穷集.

既然 X 是一个紧致度量空间, 它的无穷点集 M 就应该有一个聚点 p^*: $p^*\in M'$. 因此

$$\forall\sigma>0,\quad \exists n\geqslant\frac{1}{\sigma},\quad \text{s.t. } d(p^*,\ p_n)<\sigma;$$

但对于这样的标数 $n\geqslant\frac{1}{\sigma}$, 我们同时还有

$$d(p_n,\ q_n)<\frac{1}{n}\leqslant\sigma.$$

所以对于这样的 n 我们有

$$d(p^*,\ q_n)<2\sigma.$$

由于 $\forall n$, $q_n\in B$, 而 $\sigma>0$ 是任意的, 与上面的论证相同, 我们得到 $d(p^*,\ B)=0$, 从而 $p^*\in B$. 由于 $M\subset A$, A 是闭集, 因此

$$p^*\in M'\Rightarrow p^*\in A'\subset A.$$

这样一来, 我们又得到 $A\cap B\neq\emptyset$. 这是不可能的.

由此可见, X 必须是一个连通空间. ∎

把(5.10)与(2.3.2)结合起来, 我们就得到下面的

(5.11) **定理** 紧致度量空间 X 是连通的 $\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0$, 空间 X 的每一对点都能够用 X 中的一条 ε-链连结起来.

证明了定理(5.11)以后, 人们可能会这样猜想: 认为(5.11)中的条件也是完全空间具有连通性的充要条件, 从而也就使定理(5.11)得到推广. 可是这个猜想是不对的.

例 12 欧氏平面 $\mathbb{R}^2$ 上由一条双曲线和它的渐近线上所有点组成的集合 X, 作为 $\mathbb{R}^2$ 的子空间是完全的, 并且满足定理(5.11)中的"ε-链条件", 但是它并不是一个连通空间.

3. 勒贝格引理·函数的一致连续性 在推广《数学分析》中一

致连续性的概念之前，我们先证明下面的勒贝格引理；它就其本身而论，也是有意义的，因为它帮助我们进一步透过度量性质理解到紧致性的实质.

(5.12) **勒贝格引理** 设(X, d)是一个紧致度量空间. 那末，$\forall X$ 的开覆盖

$$\mathscr{U}=\{U_\alpha\}_{\alpha\in I},$$

$\exists$ 正数 $\lambda=\lambda(\mathscr{U})\ni\cdot\forall A\subset X$, s. t. $\delta(A)<\lambda$, $\exists\alpha\in I$, s. t. $A\subset U_\alpha$.

(5.13) **定义** 勒贝格引理(5.12)中的那个正数 λ 叫做勒贝格数.

因此，勒贝格引理可以简述如下：紧致度量空间的每个开覆盖都有一个勒贝格数.

勒贝格引理的证明 假定恰恰相反，$\exists X$ 的一个开覆盖 $\mathscr{U}$，它没有勒贝格数. 设 $\mathscr{U}=\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$. 于是 $\forall n\in\mathbb{N}$, $\frac{1}{n}$ 不是 $\mathscr{U}$ 的勒贝格数. 因此

$$\exists A_n\subset X\ni\cdot\delta(A_n)<\frac{1}{n},$$

但是 $\forall\alpha\in I$, $A_n\not\subset U_\alpha$. 显然 $\forall n$, $A_n\neq\emptyset$, 所以 $\exists$ 点 $x_n\in A_n$. 由于度量空间 X 是紧致的，因而根据定理(5.3)，它是序列式列紧的. 于是 X 中的序列 $\{x_n\}$ 有一个子序列 $\{x_{n_k}\}$ 收敛于 X 的一点 x. 既然 $\mathscr{U}$ 是 X 的一个开覆盖，那就必然 $\exists\alpha_0\in I$, s. t. $x\in U_{\alpha_0}$. 因为 $F=\mathscr{C}U_{\alpha_0}$ 是闭集，并且 $x\notin F=\overline{F}$, 所以由定理(3.5.3)立即推出 $d(x, F)>0$. 令 $\varepsilon=d(x, F)$. 那末，

$$\exists k\in\mathbb{N}, \text{s. t. } n_k>\frac{2}{\varepsilon}\wedge d(x, x_{n_k})<\frac{\varepsilon}{2}.$$

于是由于 $\delta(A_{n_k})<\frac{1}{n_k}$, $\forall y\in A_{n_k}$ 总有

$$d(x, y)\leqslant d(x, x_{n_k})+d(x_{n_k}, y)<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{1}{n_k}<\varepsilon.$$

这证明了 $y\notin F$. 因此, $y\in A_{n_k}\Rightarrow y\in U_{\alpha_0}$. 故 $A_{n_k}\subset U_{\alpha_0}$. 这与所设矛盾. 】

这样,我们又得到紧致度量空间的如下判别准则:

(5.14) **定理** 度量空间 X 是紧致的 $\Leftrightarrow X$ 是完全有界的,并且 X 的每个开覆盖都有一个勒贝格数.

证 条件的必要性立即从(5.4)及勒贝格引理(5.12)看出. 我们去证明条件的充分性. 任意给定空间 X 的一个开覆盖 $\mathscr{U}=\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$. 依假设覆盖 $\mathscr{U}$ 有一个勒贝格数 $\lambda>0$. 根据定理(3.5.8),由于 X 是完全有界的, X 又有一个 λ-覆盖 $(M_1, M_2, \cdots, M_n)$:

$$X=M_1\cup M_2\cup\cdots\cup M_n,\quad \delta(M_i)<\lambda,\quad (i=1, 2, \cdots, n)$$

根据勒贝格数的定义, $\forall i\in A(n)$, $\exists\alpha_i\in I$, s. t. $M_i\subset U_{\alpha_i}$. 这样一来,我们有

$$X=U_{\alpha_1}\cup U_{\alpha_2}\cup\cdots\cup U_{\alpha_n},$$

所以 $(U_{\alpha_1}, U_{\alpha_2}, \cdots, U_{\alpha_n})$ 是开覆盖 $\mathscr{U}$ 的一个有限子覆盖. 既然空间 X 的任意开覆盖都有一个有限子覆盖,因而空间 X 是紧致的. 条件的充分性就证明了. 】

(5.15) **系** 完全有界空间 X 是完全的 $\Leftrightarrow X$ 的每个开覆盖都有一个勒贝格数.

证 这是定理(5.14)与(5.5)的直接推论. 】

我们现在把《数学分析》中众所周知的函数的一致连续性推广到度量空间中去.

(5.16) **定义** 设 (X, d) 与 (Y, d') 是两个任意给定的度量空间,又 $f: X\to Y$. 如果 $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$, s. t.

$$(x', x'')\in X^2\wedge d(x', x'')<\delta\Rightarrow d'(f(x'), f(x''))<\varepsilon,$$

那末,我们就说,函数 f 是一致连续的.

与命题(1.5.3)作一比较,我们立即看出:

(5.17) 凡是一致连续的函数必然连续.

命题(5.17)的逆命题不真，这已是在«数学分析»中为人们所熟知的事实. 而«数学分析»中关于一致连续性的著名定理则可以推广如下:

(5.18) **定理** 如果 f 是紧致度量空间 (X, d) 到度量空间 (Y, d') 内的一个连续函数，那末，f 必然一致连续.

证 因为函数 f 在空间 X 的各点处连续，所以

$$\forall x\in X \wedge \forall \varepsilon>0,\ \exists \delta_x>0,\ \ni\cdot$$

$$x'\in B(x,\ \delta_x)\Rightarrow d'(f(x),\ f(x'))<\frac{\varepsilon}{2}.$$

令 $\mathscr{U}=\{B(x,\ \delta_x)\}_{x\in X}$; 则 $\mathscr{U}$ 是紧致度量空间 X 的一个开覆盖. 根据勒贝格引理(5.12)，开覆盖 $\mathscr{U}$ 有一个勒贝格数 $\delta>0$, s. t.

$$\forall\ (x',\ x'')\in X\times X,\ \text{s. t. } d(x',\ x'')<\delta,\ \exists x\in X,\ \text{s. t.}$$

$$x'\in B(x,\ \delta_x)\wedge x''\in B(x,\ \delta_x).$$

于是

$$d'(f(x'),\ f(x''))\leqslant d'(f(x'),\ f(x))+d'(f(x),\ f(x''))$$

$$<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

因此 f 是一致连续的. ▌

不引用勒贝格引理，定理(5.18)也可以得到证明.

定理(5.18)的另一证明* 假定恰恰相反，f 不是一致连续的. 那末，就应该

$$\exists \varepsilon>0,\ \text{s. t. } \forall n\in\mathbb{N},\ \exists x_n\in X,\ y_n\in X,\ \text{s. t.}$$

$$d(x_n,\ y_n)<\frac{1}{n},$$

但是却有 $d'(f(x_n),\ f(y_n))\geqslant\varepsilon$. 因为 X 是一个紧致度量空间，所以序列 $\{x_n\}$ 有一个子序列 $\{x_{\nu(k)}\}$ 收敛于 X 的一点 x:

$$\lim_{k\to\infty} x_{\nu(k)}=x,$$

其中 $\forall k\in\mathbb{N},\ \nu(k)\in\mathbb{N}$, 并且 $\nu(k)$ 是一个严格递增数列. 既然

$$d(x, y_{\nu(k)}) \leqslant d(x, x_{\nu(k)}) + d(x_{\nu(k)}, y_{\nu(k)})$$

$$< d(x, x_{\nu(k)}) + \frac{1}{\nu(k)},$$

而且 $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{1}{\nu(k)} = 0, \quad \lim\limits_{k\to\infty} d(x, x_{\nu(k)}) = 0,$

那末，我们就应该有

$$\lim_{k\to\infty} d(x, y_{\nu(k)}) = 0, \quad \text{即} \quad \lim_{k\to\infty} y_{\nu(k)} = x.$$

由于 f 的连续性，根据定理(3.3.7)，我们有

$$\lim_{k\to\infty} f(x_{\nu(k)}) = f(x) = \lim_{k\to\infty} f(y_{\nu(k)}),$$

因此 $\lim\limits_{k\to\infty} d'(f(x_{\nu(k)}), f(y_{\nu(k)})) = 0.$

但这与 $\forall k \in \mathbb{N}$,

$$d'(f(x_{\nu(k)}), f(y_{\nu(k)})) \geqslant \varepsilon$$

这一事实矛盾. ▌

六、欧氏空间里的紧致集与紧致空间上的连续实值函数

本节的目的是把以上各节所述紧致性的一般理论应用到欧氏空间，并着重应用到紧致空间或紧致集上的连续实值函数上去. 为此，我们得首先弄清楚欧氏空间里紧致集的特征.

(6.1) **定理** n 维欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 的点集 A 是紧致的 $\Leftrightarrow$ A 是 $\mathbb{R}^n$ 的有界闭集.

证 由于 $\mathbb{R}^n$ 是一个度量空间，这个定理是很明显的. 事实上，条件的必要性直接由(5.6)的系(5.7)看出. 既然在例(二)9中我们已经证明 $\mathbb{R}^n$ 是一个完全空间，又在例(三)13中证明了 $\mathbb{R}^n$ 的任何有界集都是完全有界的，那末，条件的充分性就直接由(5.8)推出. ▌

特别地，实直线 $\mathbb{R}$ 的点集 A 是紧致的 $\Leftrightarrow$ A 是 $\mathbb{R}$ 的有界闭集.

在例 2 中，当我们证明有界闭区间$[a, b]$是紧致集时，是在承认“有限覆盖定理”为已知的情形下进行推理的．现在这一事实已变得很明显，并且不需要承认“有限覆盖定理”为已知，因为任何有界闭区间都是实直线 $\mathbb{R}$ 的有界闭集．

有限覆盖定理的一般形式可表述如下：

(6.2) **海纳-波雷尔-勒贝格定理** 如果一个 n 维长方体被任何一族 n 维开长方体所覆盖，则这个覆盖有一个有限子覆盖．

证 任何 n 维长方体都是 n 维欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 的有界闭集，因此根据定理(6.1)，凡是 n 维长方体(包括 n 维立方体在内)都是 $\mathbb{R}^n$ 的紧致集，又任何 n 维开长方体都是 $\mathbb{R}^n$ 的开集．于是根据紧致集的定义，定理得证．▌

定理(6.2)中被覆盖的点集是一个“n 维长方体”的要求过于强了一些，只须代之以 $\mathbb{R}^n$ 中的任何有界闭集就行了．这样一来，定理(6.2)就得到了推广．

我们只须用不多的几句话就可以给古典《数学分析》中著名的波尔察诺-维尔斯特拉斯的“聚点原则”以一个清晰而严格的证明．

(6.3) **波尔察诺-维尔斯特拉斯定理** n 维欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 中的任何无穷有界集必定至少有一个聚点．

证 令 A 为 $\mathbb{R}^n$ 中的一个随意的有界无穷集．那末，因为 A 是一个有界集，所以 $\exists$ n 维立方体 Q^n, s. t. $A\subset Q^n$．根据(6.1)，Q^n 是紧致的，因而是列紧的．所以 Q^n 的无穷子集 A 有一个聚点 $p\in Q^n$，而点 p 也是 $\mathbb{R}^n$ 中点集 A 的一个聚点．▌

现在让我们去推广古典《数学分析》中著名的维尔斯特拉斯极值定理．为此，让我们先证明下面的

(6.4) **引理** 如果实直线 $\mathbb{R}$ 的非空闭集 A 有上(下)界，又令

$$\mu=\sup A(\lambda=\inf A),$$

则 $\mu\in A(\lambda\in A)$.

证 设 A 是 $\mathbb{R}$ 的有上界的非空闭集. 众所周知, $\exists \sup A=\mu\in\mathbb{R}$. 令 U 为包含 μ 的 $\mathbb{R}$ 的任意开集; 那末, $\exists a, b\in\mathbb{R}, a<b$, s. t.

$$\mu\in]a, b[\subset U.$$

因为 $a<\mu, \mu=\sup A$, 所以 $\exists c\in A$, s. t. $a<c\leqslant\mu$. 由此可见, $c\in]a, b[\cap A$, 故 $U\cap A\neq\emptyset$. 既然包含点 μ 的任何开集 U 都与 A 相交, 因此根据定理(1.4.5), $\mu\in\overline{A}$. 因为 A 是闭集, 所以从定理(1.4.6)看出, $\overline{A}=A$, 从而有 $\mu\in A$.

同理可证, 当非空闭集 A 有下界时, 则 $\inf A=\lambda\in A$. ▌

(6.5) **定理** 如果 X 是一个紧致空间, 又 f 是 X 上的连续实值函数, 则 f 是空间 X 上的有界函数, 并且 f 在 X 中达到它的上、下确界① 至少各一次.

证 从定理(1.10)看出, $f(X)$ 是实直线 $\mathbb{R}$ 的一个非空紧致集. 于是根据定理(6.1), $f(X)$ 是 $\mathbb{R}$ 的一个非空有界闭集, 因此 f 是空间 X 上的一个有界函数. 令

$$\lambda=\inf_{x\in X}f(x)=\inf f(X),$$

$$\mu=\sup_{x\in X}f(x)=\sup f(X);$$

那末, 由引理(6.4)看出, $\lambda\in f(X)$, $\mu\in f(X)$. 所以

$$\exists x_1\in X\wedge\exists x_2\in X\ni\cdot f(x_1)=\lambda\wedge f(x_2)=\mu. \text{▌}$$

显而易见, 定理(6.5)证明中的 μ 与 λ 分别是函数 f 在 X 上所取到的最大值与最小值. 因此定理(6.5)又可以表述如下:

在紧致空间上连续的实值函数必然有界, 并且有最大值与最小值.

---

① 关于函数的有界性及其上、下确界的定义, 请参阅第三章、第五节的款1.

这样一来，古典分析中的维尔斯特拉斯极值定理就成了定理(6.5)的特例.

(6.6) **维尔斯特拉斯极值定理** 设 D 是 n 维欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 中的一个任意有界闭区域(特别地，D 可以是一个 n 维长方体). 那末，在 D 上连续的每个实值函数都是有界的，并且有最大值与最小值.

证 因为 D 是 $\mathbb{R}^n$ 的紧致子空间，所以这是定理(6.5)的直接推论.】

在定理(6.6)中 D 为"区域"的条件显然是多余的，因为定理(6.5)及(6.6)的成立，只用到了空间的紧致性与函数的连续性，而与连通性毫无关联. 去掉多余的条件，定理(6.6)可以表述为如下的较强形式:

(6.7) 在 n 维欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 中，任意非空有界闭集上连续的每个实值函数都是有界函数，并且在这个有界闭集里达到函数的上、下确界至少各一次.

把定理(5.18)应用到 $\mathbb{R}^n$ 中的紧致集上的连续实值函数去，我们得到

(6.8) 在 n 维欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 中，任意非空有界闭集 A 上连续的每个实值函数都是一致连续的.

特别地，(6.8)中的有界闭集 A 可以是一个有界闭区域，于是就得到古典分析中人所周知的定理.

我们知道，对于任意的度量空间(X, d)，d 是积空间 $X\times X$ 上的连续实值函数；如果在 X 中任意固定一点 x_0，则 $\forall x\in X$，令 $d_{x_0}: x\to d(x_0, x)$，如此，d_{x_0} 是 X 上的连续实值函数. 如果(A, d_A)是(X, d)的子空间，为了方便计，d 在 $A\times A$ 上的限制 d_A 仍将写成 d，d_{x_0} 在 A 上的限制 $d_{x_0}|A$ 仍将写成 d_{x_0}；如此，则 d 在积空间 $A\times A$ 上连续，又 d_{x_0} 在 A 上连续.

把定理(6.5)应用到度量空间(X, d)的非空紧致集A及距离函数d以及由它派生的函数d_x上去，我们得到下列各命题.

(6.9) 如果A是度量空间(X, d)的任一非空紧致集，又x是空间X的任意点，则$\exists y\in A\ni\cdot$

$$d(x, y)=d(x, A).$$

证 这是定义(3.5.2)及定理(6.5)的直接推论. ∎

当空间$X=\mathbb{R}^n$时，则命题(6.9)的条件可以削弱.

(6.10) 如果A是n维欧氏空间$(\mathbb{R}^n, d)$的任一非空闭集，又x是空间$\mathbb{R}^n$的任意点，则$\exists y\in A\ni\cdot$

$$d(x, y)=d(x, A).$$

证 由于$A\neq\emptyset$，取$\delta>0$充分大，可使$B(x, \delta)\cap A\neq\emptyset$，这里的$B(x, \delta)$是以$x$为中心、$\delta$为半径的$\mathbb{R}^n$中的开球. 令$\overline{B}(x, \delta)$表示$B(x, \delta)$的闭包，并令$B^*=\overline{B}(x, \delta)\cap A$；则$B^*$显然是$\mathbb{R}^n$中的一个有界闭集，于是根据定理(6.1)，$B^*$是$\mathbb{R}^n$的一个紧致集，而且$B^*\neq\emptyset$. 这样，根据命题(6.9)

$$\exists y\in B^*, \text{ s. t. } d(x, y)=d(x, B^*).$$

显而易见 $$d(x, B^*)=d(x, A)\wedge y\in A. \ ∎$$

命题(6.10)之所以能够成立，是由于n维欧氏空间的完全性以及它的任何有界子集都具有完全有界性的这两个性质起着决定性作用. 要使(6.9)中紧致性的条件能作象命题(6.10)那样的削弱，这两个性质是缺一不可的.

例 13 令$a, b\in\mathbb{R}$, $a<b$，并令

$$A=]b, +\infty[, B=]-\infty, a], \quad X=A\coprod B.$$

如果把X看成实直线$\mathbb{R}$的度量子空间，则A是空间X的闭集，又

$$a\in X, d(a, A)=b-a.$$

但是 $$\sim\cdot\exists x\in A\ni\cdot d(a, x)=b-a.$$

我们看到，虽然 X 的每个有界子集都是完全有界的，但它不是完全的。

现在让我们来看下面的例子：

例 14 我们定义希尔伯特空间 H^ω 的子集 A 如下：

$$A=\{x^{(n)}=\{x_k^{(n)}\}_{k\in\mathbb{N}}\in H^\omega \mid (\forall n\in\mathbb{N},\ x_n^{(n)}=\frac{n+1}{n})\wedge(\forall k\in\mathbb{N}\ni\cdot\ k\neq n,\ x_k^{(n)}=0)\}.$$

那末，A 显然是希尔伯特空间 H^ω 的一个有界闭集. 事实上，A 是有界的，是因为 $\forall(x^{(m)},\ x^{(n)})\in A\times A$，总有

$$d(x^{(m)},\ x^{(n)})<2\sqrt{2},$$

于是 A 的直径

$$\delta(A)\leqslant 2\sqrt{2}.$$

它之所以是闭的，是因为

$$\forall(x^{(m)},\ x^{(n)})\in A\times A,\ m\neq n,$$

总有
$$d(x^{(m)},\ x^{(n)})>\sqrt{2},$$

从而 $\forall x\in H^\omega$，若取

$$0<\varepsilon\leqslant\frac{\sqrt{2}}{2},$$

则 H^ω 中以 x 为中心、ε 为半径的开球 $B(x,\ \varepsilon)$ 不能包含 A 中多于一个以上的点；由于 H^ω 是一个 T_1 空间，因而 $A'=\emptyset$，于是 A 是闭的. 试看 H^ω 的原点 $O=(0,\ 0,\ \cdots,\ 0,\ \cdots)$ 到点集 A 的距离 $d(O,\ A)$. 因为

$$\forall n,\ d(O,\ x^{(n)})=\frac{n+1}{n}>1,$$

又
$$\lim_{n\to\infty}d(O,\ x^{(n)})=1,$$

所以 $d(O,\ A)=1$. 但不等式 $d(O,\ x^{(n)})>1$ 说明

$$\sim\cdot\exists x\in A,\ \text{s. t.}\ d(O,\ x)=1.$$

我们看到，H^ω 虽然是一个完全空间，可是它的有界子集并不都是

完全有界的. 例如 A 就是 H^ω 的一个有界而非完全有界的子集.

下面命题的真实性是显而易见的:

(6.11) 如果 A 与 B 都是度量空间 X 的非空紧致集, 则

$$\exists x\in A \wedge \exists y\in B, \text{ s. t. } d(x, y)=d(A, B).$$

证 这是因为, 根据吉洪诺夫定理(2.1), $A\times B$ 是紧致的, 又距离函数 d 在 $A\times B$ 上连续. ∎

读者想必已经发现, (6.9)可以看成是(6.11)的一个特例. 这是因为任何单点集 $A=\{x\}$ 都是空间 X 的非空紧致集; 在此情形下

$$d(A, B)=d(x, B).$$

(6.12) 如果 A 与 B 都是度量空间 X 的非空紧致集, 并且

$$A\cap B=\emptyset,$$

则 $d(A, B)>0$.

证 根据(6.11)

$$\exists x\in A \wedge \exists y\in B, \text{ s. t. } d(x, y)=d(A, B).$$

但是 $x\neq y$(因为 $A\cap B=\emptyset$). 所以

$$d(A, B)>0. \ ∎$$

命题(6.12)可以表述为它的逆否形式:

如果 A 与 B 都是度量空间 X 的非空紧致集, 并且 $d(A, B)=0$, 则 $A\cap B\neq\emptyset$.

如果度量空间 $X=\mathbb{R}^n$, 则命题(6.11)中关于紧致性的条件可以适当削弱.

(6.13) 如果 A 是 n 维欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 的一个非空紧致集, 又 B 是 $\mathbb{R}^n$ 的一个非空闭集, 那末, $\exists x\in A,\ y\in B \ni \cdot$

$$d(x, y)=d(A, B).$$

命题(6.13)的证明在«实变函数论»的教科书[①]中可以找到，故从略.

显而易见，在欧氏空间中，在命题(6.13)的同样条件下可得出结论：

$$A\cap B=\emptyset \Rightarrow d(A,\ B)>0.$$

但是不难看出，即使是在欧氏空间中，当 A 与 B 只假定为不相交的非空闭集时，这个结论不必成立.

例 15 以 A 表示平面 $\mathbb{R}^2$ 上并以 $y=\dfrac{1}{x}$ 为其方程的双曲线:

$$A=\left\{(x,\ y)\in\mathbb{R}^2 \,\middle|\, x\neq 0 \wedge y=\frac{1}{x}\right\},$$

并令 B 表示 x 轴:

$$B=\{(x,\ y)\in\mathbb{R}^2 \,|\, y=0\}.$$

那末，众所周知，A 与 B 都是 $\mathbb{R}^2$ 的非空闭集，并且 $A\cap B=\emptyset$，但是 $d(A,\ B)=0$.

此外，(6.12)中"紧致集"这一条件不能削弱为"有界闭集"，即使度量空间 X 是完全的.

例 16 取例 14 中定义的希尔伯特空间 H^ω 的子集 A 及例(三)12 的 H^ω 的子集 X 作为 B:

$$B=\{y^{(n)}=\{y_k^{(n)}\}_{k\in\mathbb{N}}\in H^\omega \,|\, (\forall n,\ y_n^{(n)}=1)\wedge(\forall k\ni\cdot\ k\neq n,\ y_k^{(n)}=0)\},$$

则因为
$$d(x^{(n)},\ y^{(n)})=\frac{1}{n}\to 0\ (n\to\infty),$$

所以 $d(A,\ B)=0$；但是 $A\cap B=\emptyset$. 于此，A 与 B 都是 H^ω 的有界闭集

下面的命题也是定理(6.5)在度量空间中的一个应用.

---

① 例如可参考 И. П. 那汤松著，徐瑞云译：«实变函数论»(修订本)上册，高等教育出版社(或人民教育出版社)，1958 年新 2 版，第二章，§ 4，第 44—45 页.

(6.14) 如果 A 是度量空间 (X, d) 的一个非空紧致集，则 $\exists(x, y)\in A^2$, $\ni\cdot d(x, y)=\delta(A)$.

证 这是因为，d 是积空间 $X\times X$ 的紧致集 $A\times A$ 上的连续实值函数.]

最后我们去证明下面的命题，它从某种意义上来说，是(6.5)的一个推广.

(6.15) 如果 A 是拓扑空间 X 的一个非空紧致集，又 f 是 A 到度量空间 (Y, d) 内的一个连续函数，则函数 f 是有界的，并且 $\exists(x_1, x_2)\in A\times A\ni\cdot$

$$d(f(x_1), f(x_2))=\delta(f).$$

证 根据定理(1.10)，$f(A)$ 是度量空间 Y 的非空紧致集，因此，根据(5.7)，$f(A)$ 在空间 Y 中是有界的，也就是说，函数 f 的直径

$$\delta(f)=\delta(f(A))<+\infty.$$

于是根据定义(3.5.10)，f 是一个有界函数. 又 $f(A)$ 既然是空间 Y 的非空紧致集，根据(6.14)，那就必须

$$\exists(y_1, y_2)\in f(A)\times f(A), \text{ s. t. } d(y_1, y_2)=\delta(f).$$

但是

$$(y_1, y_2)\in f(A)\times f(A)\Rightarrow\exists(x_1, x_2)\in A\times A, \text{ s. t. }$$
$$f(x_1)=y_1\wedge f(x_2)=y_2.$$

因此

$$\exists(x_1, x_2)\in A\times A, \text{ s. t. } d(f(x_1), f(x_2))=\delta(f).]$$

附言 许多作者把紧致度量空间称为紧致统 (compactum)，并把连通的紧致统称为连续统(continuum).

习 题

I. 证明下列各命题：

1. 如果 $\{F_\alpha\}_{\alpha\in I}$ 是 T_2 空间 X 的一族紧致集，则 $\bigcap_{\alpha\in I}F_\alpha$ 是紧致的.

2. 在任何拓扑空间中，有限个紧致集的并集是紧致的.

3. 空间之为紧致、列紧、覆盖式列紧与序列式列紧的性质都是拓扑性质.

4. 空间的局部紧致性是一个拓扑性质.

5. 如果 X 是满足公理 A_1 的列紧 T_1 空间，又 f 是 X 到拓扑空间 Y 内的一个(连续)映射，则 $f(X)$ 是空间 Y 的列紧集.

6. 如果 f 是满足公理 A_2 的列紧 T_1 空间 X 到 T_2 空间 Y 上的连续双一一函数，则 f 是空间 X 到空间 Y 上的一个同胚.

7. 如果 A 是度量空间 X 的紧致集，又 $U\supset A$ 是 X 的一个开集，则

$$\exists\varepsilon>0,\ \text{s. t. } x\in A\Rightarrow B(x,\ \varepsilon)\subset U.$$

8. 希尔伯特空间 H^ω 不是局部紧致的.

9. 设 X 是一个紧致空间，又 $(Y,\ d)$ 是一个完全空间. 令

$$Y^X=\{f:X\to Y\,|\,f\text{ 连续}\},$$

并令
$$\rho(f,\ g)=\sup_{x\in X} d(f(x),\ g(x)).$$

那末，ρ 是 Y^X 上的一个度量，并且度量空间 $(Y^X,\ \rho)$ 是完全的.

10. 每个局部紧致的度量空间都是局部完全的（局部完全性的定义见习题(二)VI*）.

11. 如果 A 是度量空间 $(X,\ d)$ 的非空紧致集，则 $\forall B\subset X,\ B\neq\emptyset$，$\exists a\in A\ni\cdot d(A,\ B)=d(a,\ B)$.

II. 回答下列各问题，无论肯定的或否定的答案都应该说明理由或举出反例.

1. 令
$$A=\left\{\frac{1}{n}\,|\,n\in\mathbb{N}\right\}.$$

作为实直线 $\mathbf{R}$ 的点集，A 是否紧致的？又 $A\cup\{0\}$ 是否紧致的？

2. 拓扑空间中无穷多个紧致集的并集必须是紧致的吗？

3. 列紧空间的连续象是否必须是列紧的？

4. 局部完全空间是否都是局部紧致的？

III. 设 X 是一个拓扑空间，$M\subset X$. 如果 M 的每个无穷子集都至少有一个聚点(不必属于 M)，则 M 称为空间 X 的**条件列紧集**(conditionally compact set). 试证：

1. 条件列紧集的任何子集都是条件列紧的.

2. 有限多个条件列紧集的并集是条件列紧的.

3. 每个列紧集是条件列紧的，因此每个紧致集是条件列紧的.

4. 如果 X 是满足公理 A_2 的 T_1 空间，又 M 是它的一个条件列紧闭集，则 M 是紧致的.

IV. 对于度量空间，我们给出下面的

公理 B_* 每个有界集都是完全有界的.

试给出满足与不满足公理 B_* 的度量空间各二例.

定义 如果度量空间 X 的非空子集 A 作为空间 X 的度量子空间满足公理 B_*，则 A 称为空间 X 的一个 B_*-集.

我们约定：空集是任何度量空间的 B_*-集.

以下我们提到空间 X 时，总指的任意给定的一个度量空间 (X, d).

求证下列各命题：

1. 空间 X 的 B_*-集的任何子集都是 B_*-集，从而满足公理 B_* 的空间的任何点集都是 B_*-集.

2. 如果 A 是空间 X 的一个 B_*-集，则它的闭包 $\overline{A}$ 也是一个 B_*-集.

3. 凡空间 X 的紧致集都是 B_*-集，从而凡紧致统的点集都是 B_*-集.

4. 如果空间 X 满足公理 B_*，则空间 X 是可分的.

5*. 有界空间 X 满足公理 B_* $\Leftrightarrow$ 空间 X 与某一紧致统的一个子空间等距.

6. 在满足公理 B_* 的空间 X 中，点集 A 是紧致的 $\Leftrightarrow$ A 是有界的完全集.

7. 在满足公理 B_* 的完全空间 X 中，点集 A 是紧致的 $\Leftrightarrow$ A 是空间 X 的有界闭集.

8. 设空间 X 满足公理 B_*. 那末，X 是局部紧致的 $\Leftrightarrow$ X 是局部完全的.

9. 空间 X 是完全的并且满足公理 B_* $\Leftrightarrow$ 空间 X 的每个有界集都是条件列紧的.

10. 如果空间 X 满足公理 B_*，那末，对于空间 X 的任何非空有界完全集 A 以及 X 的任何非空完全集 B，$\exists x\in A,\ y\in B$, s. t.

$$d(x, y)=d(A, B).$$

我们称习题 10 中命题的结论为

公理 E_d 对于度量空间 X 的任何非空有界完全集 A 以及 X 的任何非

空完全集 B, $\exists x\in A$, $y\in B$, s. t.

$$d(x,\ y)=d(A,\ B).$$

于是习题 10 中的命题可以简单地表述为：对于任意的度量空间 X, 公理 $B_*\Rightarrow$ 公理 E_δ.

11. 如果度量空间 X 满足公理 E_δ, 那末，点集 X 的导集 X' 必须是一个 B_*-集. 特别地，当 X 是一个完备空间时，即当 $X'=X$ 时，公理 $E_\delta\Rightarrow$ 公理 B_*. 因此，对于完备的度量空间 X, 公理 $B_*\Leftrightarrow$ 公理 E_δ.

试举例说明，对于一个随意的度量空间 X, 公理 $E_\delta\not\Rightarrow$ 公理 B_*, 从而知道公理 B_* 强于公理 E_δ.

V*. 设 X 与 Y 是两个随意的拓扑空间，又记号 Y^X 的意义与习题 I, 9 相同，并设 $A\subset X$, $B\subset Y$; 而令

$$(A;B)=\{f\in Y^X\,|\,f(A)\subset B\},$$

则 $\forall A\subset X$, $B\subset Y$, 我们有 $(A;B)\subset Y^X$. 令

$$\mathscr{S}=\{(F;\ G)\subset Y^X\,|\,F\text{ 是 }X\text{ 的紧致集}\wedge G\text{ 是 }Y\text{ 的开集}\},$$

那末，由 $\mathscr{S}$ 所生成的拓扑、即以 $\mathscr{S}$ 为亚基的拓扑 $\mathscr{T}$ 叫做 Y^X 上的**紧开拓扑**，拓扑空间 $(Y^X,\ \mathscr{T})$ 叫做一个**函数空间**. 当我们提到函数空间 Y^X 时，指的就是空间 $(Y^X,\ \mathscr{T})$.

试证：

1. 如果 Y 是一个豪斯道夫空间，则函数空间 Y^X 也是一个豪斯道夫空间.
2. 如果 X 是一个满足公理 A_2 的紧致豪斯道夫空间，又 Y 也满足公理 A_2, 则函数空间 Y^X 必须满足公理 A_2.
3. 如果 X 是由两个点组成的离散空间，那末函数空间 $Y^X\approx Y\times Y$.
4. Y 总能被同胚地映射到函数空间 Y^X 内.
5. 如果 Y 是 T_1 空间，则空间 Y^X 也是 T_1 空间.
6. 函数空间 $[0,\ 1]^{[0,1]}$ 不是紧致的；因此当 X 与 Y 都是满足公理 A_2 的紧致豪斯道夫空间时，Y^X 不必是紧致的.
7. 如果空间 X 是紧致的，又 Y 可以用 Y 上的距离函数 d 度量化，则函数空间 Y^X 一定能用习题 I, 9 中的度量 ρ 度量化. 由此可见，习题 I, 9 中由度量 ρ 所导致的拓扑就是 Y^X 上的紧开拓扑.

第五章　正则性与正规性·度量化定理

满足了分离公理和可数性公理的拓扑空间，虽然已经在一定程度上反映了人们所熟知的那些空间形式，但仅仅这些公理，却还不足以保证拓扑空间具有更丰富的寻常空间所应具有的许多性质，比如说，它们就不足以保证拓扑空间具有度量的性质．由于这个缘故，我们还必须给拓扑空间以更进一步的限制．这样，空间的"正则性"与"正规性"这两个概念的引入就成为必要的了，因为它们和两点之间的距离这一概念有着密切联系．

本章的重点是第三节中的乌里松（Урысон）引理与铁策(Tietze)关于连续实值函数的开拓定理，以及第五节中的乌里松度量化定理[①]．

一、正 则 空 间

1．定义及举例　在第三章中引入的三个分离公理有一个共同的性质，那就是用一个或两个点的邻域去分离两个点．在这一节里即将引入的分离公理将用点与"点集的"邻域去分离点与不包含这个点的点集．因此有必要先引入"点集的邻域"的概念．

(1.1)　**定义**　设 A 与 V 是拓扑空间$(X, \mathscr{T})$的任意两个点集，s. t. $A\subset V$．如果 $\exists U\in\mathscr{T}\ni\cdot$

$$A\subset U\subset V,$$

① 乌里松的度量化定理或嵌入定理，虽然只给出了拓扑空间可度量化的充分条件，但迄今仍被认为是一个令人较为满意的结果．至于拓扑空间可度量化的充要条件．可参阅：1）关肇直，《拓扑空间概论》，科学出版社，1958 年；2）J. L. Kelley, General Topology．

则 V 称为点集 A 的一个邻域.

显然，空间 X 中每个包含点集 A 的开集都是 A 的邻域，这样的邻域称为 A 的开邻域.

这样一来，V 是单元集 $\{x\}$ 的邻域 $\Leftrightarrow V$ 是点 x 的邻域.

正则空间的定义可表述如下:

(1.2) **定义** 满足下列公理的任何拓扑空间都叫做**正则空间**:

维多里斯(Vietories)公理 对于任一点 x 与不包含点 x 的任一闭集 F，总存在点 x 的一个邻域 V_1 与闭集 F 的一个邻域 V_2 使得 $V_1 \cap V_2 = \emptyset$.

维多里斯公理又称为**第三分离公理**或**公理** T_3；任何正则 T_1 空间又叫做 T_3 空间①.

显而易见:

(1.3) 空间 X 是正则的 $\Leftrightarrow \forall x \in X \wedge \forall X$ 的闭集 $F \not\ni x$，$\exists$ 点 x 的开邻域 U_1 及 F 的开邻域 U_2, s. t. $U_1 \cap U_2 = \emptyset$.

(1.4) 每个 T_3 空间都必然是一个 T_2 空间.

命题(1.4)的逆命题不成立：并不是每个 T_2 空间也都是 T_3 空间.

例 1 试看实数系 $\mathbb{R}$ 的二次笛卡尔积 $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$.

$$\forall p = (a, b) \in \mathbb{R}^2,$$

定义集合 L_p 如下:

$$L_p = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = a \wedge (x, y) \neq p\}.$$

$\forall r \in \mathbb{R}$, $r > 0$, 令

$$U(p, r) = B(p, r) - L_p,$$

---

① 在正则空间与 T_3 空间的定义方面，文献上常常不同，甚至有将这两类空间的定义恰与我们这里的定义对换的，请读者注意！下一节中关于正规与 T_4 空间的定义也有类似情形.

其中 $B(p, r)$ 是欧氏坐标平面 $\mathbb{R}^2$ 上的开球(即开圆)。我们看出，由于 $p\notin L_p$，每个 $U(p, r)$ 都包含 p。令

$$\mathscr{B}=\{U(p, r)\mid p\in\mathbb{R}^2\wedge r>0\},$$

并用 $\mathscr{T}$ 表示以 $\mathscr{B}$ 为基的 $\mathbb{R}^2$ 上的拓扑；于是得到一个拓扑空间 $(\mathbb{R}^2, \mathscr{T})$。

不难看出，$(\mathbb{R}^2, \mathscr{T})$ 是一个 T_2 空间。事实上，如果 p 与 p' 是空间 $(\mathbb{R}^2, \mathscr{T})$ 的两个不同的点，并且令

$$r=\frac{1}{2}d(p, p'),$$

其中 d 表示 $\mathbb{R}^2$ 上的欧氏度量，则 $U(p, r)$ 与 $U(p', r)$ 分别是空间 $(\mathbb{R}^2, \mathscr{T})$ 中点 p 与点 p' 的邻域，并且

$$U(p, r)\cap U(p', r)=\emptyset.$$

但是空间 $(\mathbb{R}^2, \mathscr{T})$ 不是正则的。事实上，如果令

$$F=\mathscr{C}U(p, r),$$

则 F 是空间 $(\mathbb{R}^2, \mathscr{T})$ 的闭集，并且 $p\notin F$。设 V 是 F 的任意开邻域，并且任意取一个 $U(p, r')$。那末，不论正实数 r' 怎样小，总有

$$B(p, r')\cap L_p\neq\emptyset.$$

令 $q\in B(p, r')\cap L_p$；则 $q\in F$，因此 $q\in V$。于是 $\exists r''\in\mathbb{R}$，$r''>0$, s. t. $U(q, r'')\subset V$。

显而易见，
$$U(q, r'')\cap U(p, r')\neq\emptyset.$$

因此，
$$V\cap U(p, r')\neq\emptyset.$$

但是任何包含点 p 的开集必须包含一个 $U(p, r')$。这样一来，点 p 的任何开邻域必须与闭集 F 的任意开邻域相交，所以空间 $(\mathbb{R}^2, \mathscr{T})$ 不是正则的。

作为 T_3 空间的例子，我们看出，任何度量空间都是 T_3 空间，特别地，任意维的欧氏空间都是 T_3 空间。这两个命题的真实性将在下一节中顺便指出。

2. 正则空间的性质 我们首先去证明关于正则空间的下列判别准则.

(1.5) **定理** 拓扑空间 X 是正则的 $\Leftrightarrow \forall p\in X \wedge \forall p$ 的开邻域 U, $\exists p$ 的开邻域 V, s.t. $\overline{V}\subset U$.

证 $\Rightarrow$. $\forall p$ 的开邻域 U, 令 $F=\mathscr{C}U$. 那末, F 是空间 X 的闭集, 并且 $p\notin F$, 因为空间 X 是正则的, 所以 $\exists p$ 的开邻域 V 及 F 的开邻域 W, s.t.

$$V\cap W=\emptyset.$$

又因为 W 是开集, 所以 $\mathscr{C}W$ 闭于空间 X 中. 既然 $V\cap W=\emptyset$, 我们就必须有

$$V\subset\mathscr{C}W,\ 于是\ \overline{V}\subset\mathscr{C}W.$$

但是 $\mathscr{C}W\subset\mathscr{C}F$, 而 $\mathscr{C}F=U$. 所以我们有 $\overline{V}\subset U$.

$\Leftarrow$. 设 p 是空间 X 的任一点, 又 F 是不包含点 p 的任意闭集、很明显, 如果令 $U=\mathscr{C}F$, 则 U 是点 p 的一个开邻域. 条件既然满足, 我们就可以找到点 p 的一个开邻域 V s.t. $\overline{V}\subset U$. 令 $W=\mathscr{C}\overline{V}$; 那末, W 是空间 X 的开集. 因为 $\overline{V}\subset U$, 所以 $\mathscr{C}\overline{V}\supset\mathscr{C}U$, 即 $W\supset F$. 可见 W 是闭集 F 的开邻域. 又从 W 的定义看出, $W\cap V=\emptyset$. 由此可见, 空间 X 满足公理 T_3, 所以它是正则的. ∎

(1.6) 正则空间的每个子空间都是正则的.

证 设 A 是正则空间 X 的一个随意子空间, 又 $x\in A$, 并设 G 是子空间 A 中不包含点 x 的任意相对闭集. 那末, $\exists$ 空间 X 的闭集 F, s.t.

$$G=A\cap F.$$

由于 $x\notin F$, 而且空间 X 是正则的, 因此 $\exists$ 空间 X 的开集 V_1 与 V_2, s.t. $F\subset V_1$, $x\in V_2$, 而且

$$V_1\cap V_2=\emptyset.$$

明显地，$G\subset V_1\cap A$，$x\in V_2\cap A$，而且

$$(V_1\cap A)\cap(V_2\cap A)=\emptyset.$$

由于 $V_1\cap A$ 与 $V_2\cap A$ 相对地开于子空间 A 中，可见子空间 A 是正则的. ▌

下面的定理是很有用处的.

(1.7) **定理** X 是满足公理 A_1 的 T_3 空间 $\Rightarrow\forall x\in X$，∃点 x 处的一个可数基 $\{G_n\}$ s. t.

1) $\forall n,\ \overline{G}_{n+1}\subset G_n$;

2) $\bigcap_n G_n=\{x\}$.

证 根据定理(3.3.5)，在空间 X 的每个点 x 处∃可数基 $\{W_m\}$ s. t. $\forall m\in\mathbb{N}$,

$$W_{m+1}\subset W_m. \tag{*}$$

令 $G_1=W_1=W_{i_0}$. 因为空间 X 是正则的，又 G_1 是点 x 的开邻域，所以根据定理(1.5)，∃x 的开邻域 V_1, s. t. $\overline{V}_1\subset G_1$. 但是 $\{W_m\}$ 是点 x 处的一个基. 因此可得一个正整数 $i_1>i_0=1$, s. t.

$$W_{i_1}\subset V_1,$$

于是 $\overline{W}_{i_1}\subset G_1$. 令 $G_2=W_{i_1}$. 依此类推. 于是运用归纳构造法，我们从 $\{W_m\}$ 取出一个子序列 $\{G_n\}$ s. t. $\forall n$, $G_n=W_{i_{n-1}}$, 并且 s. t. 1)成立：$\overline{G}_{n+1}\subset G_n$.

不难看出，$\{G_n\}$ 是点 x 处的一个基. 事实上，$\{W_m\}$ 既然是点 x 处的一个基，$\forall x$ 的开邻域 U，∃m s. t. $W_m\subset U$. 但 $\{G_n\}$ 是 $\{W_m\}$ 的一个子序列. 因此，∃n, s. t. $i_{n-1}>m$, 于是由(*)看出

$$G_n\subset W_m\subset U.$$

现在令 $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ 是点 x 的一切开邻域所成的一个族；则显然

$$\bigcap_n G_n\subset\bigcap_\alpha U_\alpha.$$

因为 X 是 T_1 空间，所以根据(3.1.4)，我们有

$$\bigcap_\alpha U_\alpha=\{x\}.$$

由于$\bigcap_n G_n$也包含点x，我们看出2)也成立：

$$\bigcap_n G_n=\{x\}.\ ]$$

二、正规空间·覆盖的可收缩性

本节只给出正规空间的定义和正规空间的某些性质. 至于正规空间上的连续实值函数则归到下一节去讨论.

1. 定义及举例 正规空间的定义可表述如下：

(2.1) **定义** 满足下列公理的任何拓扑空间都叫做**正规空间**：

铁策公理 对于任意两个不相交的闭集F与G，存在F的一个邻域V_1与G的一个邻域V_2，使得$V_1\cap V_2=\emptyset$.

铁策公理又称为**第四分离公理**或**公理T_4**；任何正规T_1空间又叫做T_4空间.

显而易见：

(2.2) 空间X是正规的$\Leftrightarrow\forall X$的闭集偶(F, G) s. t.

$$F\cap G=\emptyset,$$

$\exists$开集偶(U_1, U_2) s. t.

$$F\subset U_1\wedge G\subset U_2\wedge U_1\cap U_2=\emptyset.$$

(2.3) 每个T_4空间都必然是一个T_3空间.

为了举出正规空间的实例，让我们先来证明下面的一般定理：

(2.4) 每个度量空间都是一个T_4空间.

证 令F与G是度量空间(X, d)的任意两个不相交的闭集，并令$x\in F$，$y\in G$. 于是从定理(3.5.3)看出，

$$d(x, G)>0,\quad d(y, F)>0.$$

$\forall x\in F,\ y\in G$, 令

$$a_x=d(x,\ G),\quad b_y=d(y,\ F),$$

且令
$$U_x=B\left(x,\ \frac{a_x}{2}\right),\ \ V_y=B\left(y,\ \frac{b_y}{2}\right),$$

$$U=\bigcup_{x\in F}U_x,\quad V=\bigcup_{y\in G}V_y.$$

这样一来, U 与 V 都是开集, 并且 $F\subset U$, $G\subset V$. 不难断定:

$$U\cap V=\emptyset.$$

事实上, 假定恰恰相反, $\exists z\in U\cap V$; 那末, 我们就会找到一点 $x\in F$ 以及一点 $y\in G$, s. t.

$$z\in U_x\cap V_y.$$

由此可见
$$d(x,\ z)<\frac{a_x}{2},\quad d(y,\ z)<\frac{b_y}{2}.$$

因此,
$$d(x,\ y)<\frac{1}{2}(a_x+b_y).$$

但是这是不可能的. 这是因为, 既然 $x\in F$, $y\in G$, 那就应该有

$$a_x=d(x,\ G)\leqslant d(x,\ y),\quad b_y=d(y,\ F)\leqslant d(x,\ y).$$

因此,
$$\frac{1}{2}(a_x+b_y)\leqslant d(x,\ y).$$

所以我们必须有 $U\cap V=\emptyset$. 这证明了每个度量空间 X 都是正规的. 由于任何度量空间都是 T_2 空间, 从而是 T_1 空间, 因此凡是度量空间都是 T_4 空间. ▌

由(2.4)及(2.3)立即看出, 每个度量空间都是一个 T_3 空间.

例 2 作为(2.4)的特例, 希尔伯特空间 H^ω、弗莱歇空间 E_ω 以及任意维的欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 都是 T_4 空间, 因此也都是 T_3 空间.

T_3 空间不必都是 T_4 空间, 也就是说, 命题(2.3)的逆命题不真.

例 3* 令
$$X=\{(x,\ y)\in\mathbb{R}^2|y\geqslant 0\},$$

即 X 表示坐标平面的上半平面, 但包含 x 轴 $A_x=\{(x,\ 0)\}_{x\in\mathbb{R}}$. 我们现在把 X 看成一个纯集合, 并在它上面定义一个与自然拓扑不同的拓扑如下: 令

$$\mathscr{B}=\{U_p\in\mathscr{P}(X)\mid(\forall p=(x,y)\in X\ni\cdot y>0,\ U_p=B(p,\varepsilon),\ 0<\varepsilon<y)\vee$$
$$(\forall p=(x,0)\in A_x\wedge\forall\varepsilon>0,\ U_p=B(q,\varepsilon)\cup\{p\},\ q=(x,\varepsilon)\in X)\},$$

其中$B(p,\varepsilon)$与$B(q,\varepsilon)$表示欧氏平面上的开圆. X上以$\mathscr{B}$为基的拓扑记作$\mathscr{T}_N$; 则拓扑空间$(X,\mathscr{T}_N)$是一个T_3空间,但是它不是正规的.

首先,当$p\in A_x$时,拓扑$\mathscr{T}_N$的基$\mathscr{B}$的任何元素

$$U_p=B(q,\varepsilon)\cup\{p\}$$

是点p的一个开邻域,又空间$(X,\mathscr{T}_N)$的子空间

$$X^0=X-A_x$$

同时也是欧氏平面$\mathbf{R}^2$的一个子空间. 因此$(X,\mathscr{T}_N)$显然是一个T_2空间,于是当然是一个T_1空间.

其次应该指出,A_x的任何子集都是空间$(X,\mathscr{T}_N)$的闭集. 事实上,设F是A_x的任意子集,并令$G=A_x-F$. 现在$\forall p\in G$,选定p的上述开邻域

$$U_p=B(q,\varepsilon)\cup\{p\}.$$

于是
$$\left(\bigcup_{p\in G}U_p\right)\cup X^0=G\cup X^0.$$

可见$G\cup X^0$是空间$(X,\mathscr{T}_N)$的开集,因此,$F=X-(X^0\cup G)$闭于$(X,\mathscr{T}_N)$中.

空间$(X,\mathscr{T}_N)$满足维多里斯公理是很明显的,所以它是一个T_3空间. 为了指出空间$(X,\mathscr{T}_N)$不是正规的,可令

$$F_1=\{(x,0)\in A_x\mid x\text{是有理数}\},$$
$$F_2=\{(x,0)\in A_x\mid x\text{是无理数}\},$$

那末,援引上面所得的结果,F_1与F_2都是空间$(X,\mathscr{T}_N)$的闭集,并且它们不相交: $F_1\cap F_2=\emptyset$. 可以证明F_1的任何开邻域必定与F_2的任何开邻域相交;但是这个证明比较复杂,写出来很长,而且要用到习题(二)VI*,1中的贝尔定理,故从略.

虽然T_4空间必须是T_3空间,但正规空间却不必是正则的.

例4 试看例(三)2中的拓扑空间$(\mathbb{N},\mathscr{T}_*)$. 它是正规的;这是因为它的任意两个非空闭集必然相交. 但它不是正则的;因为只有$\mathbb{N}$才是包含它的非空闭集的开集.

由此可见,公理$T_3\nRightarrow$公理T_4,又公理$T_4\nRightarrow$公理T_3. 换句话说,在开集公理体系下(甚至加上第零分离公理),公理T_3与

公理T_4是互相独立的.

2. 正规空间的性质 下面是关于正规空间的一个判别准则.

(2.5) **定理** 空间 X 是正规的$\Leftrightarrow\forall X$ 的闭集$F\wedge\forall F$ 的邻域U, $\exists F$ 的开邻域V, s. t. $\overline{V}\subset U$.

证 $\Rightarrow$. 因为U 是F 的邻域,所以$\exists$开集$U_0\supset F$ s. t. $U_0\subset U$. 令$G=\mathscr{C}U_0$; 则G 是闭集$\wedge F\cap G=\emptyset$. 既然空间 X 是正规的,那就必然$\exists$开集V 及W, s. t.

$$F\subset V\wedge G\subset W\wedge V\cap W=\emptyset.$$

于是$V\subset\mathscr{C}W$. 因为$\mathscr{C}W$ 是闭集,所以

$$\overline{V}\subset\mathscr{C}W\subset\mathscr{C}G=U_0\subset U,$$

而V 是F 的开邻域.

$\Leftarrow$. 设F_1与F_2是X 的任意两个不相交的闭集. 令$U=\mathscr{C}F_2$; 则$F_1\subset U$. 由于条件满足,我们看出

$$F_1\subset U\text{ 且 }U\text{ 为开集}\Rightarrow\exists\text{ 开集 }V_1\supset F_1\ni\cdot\overline{V}_1\subset U.$$

令$V_2=\mathscr{C}\overline{V}_1$; 则开集

$$V_2\supset F_2\wedge V_1\cap V_2=\emptyset.$$

由此可见,空间 X 是正规的. ▌

(2.6) **定理** X 是紧致豪斯道夫空间$\Rightarrow X$ 是一个T_4空间.

为了证明定理(2.6),让我们先证明下面的

(2.7) **引理** X 是紧致豪斯道夫空间$\Rightarrow X$ 是一个T_3空间.

证 因为凡是豪斯道夫空间都是T_1空间, 所以只须证明X 是正则的. 为了达到这个目的, 令F 为空间X 的任意闭集, 并且令p为X 中不属于F 的任一点. 由于X 是豪斯道夫空间,

$\forall q\in F$，$\exists q$ 的一个开邻域 U_q 及 p 的一个开邻域 $V_p^{(q)}$，s. t.

$$U_q\cap V_p^{(q)}=\emptyset.$$

$\{U_q\}_{q\in F}$ 是 F 的一个开覆盖；又 F 既然闭于紧致空间 X 中，根据(4.1.2)，它就必须是 X 的一个紧致集．因此，$\{U_q\}_{q\in F}$ 有一个有限子覆盖$(U_{q_1}, U_{q_2}, \cdots, U_{q_m})$．令

$$U=\bigcup_{i=1}^m U_{q_i},\quad V=\bigcap_{i=1}^m V_p^{(q_i)},$$

则 U 与 V 分别是点集 F 与点 p 的开邻域，并且 $U\cap V=\emptyset$．因此，空间 X 是正则的．】

定理(2.6)的证明 我们只须证明 X 是正规的．设 F 与 G 是 X 的任意一对不相交的闭集．根据引理(2.7)，X 是正则的．因此，　　$\forall p\in G$，$\exists$ 开集 $U^{(p)}\supset F\wedge\exists$ 开集 $V_p\ni p$，s. t.

$$U^{(p)}\cap V_p=\emptyset.$$

因为闭集 G 是紧致的，又 $\{V_p\}_{p\in G}$ 是 G 的一个开覆盖，所以 $\{V_p\}_{p\in G}$ 有一个有限子覆盖$(V_{p_1}, V_{p_2}, \cdots, V_{p_m})$．令

$$U=\bigcap_{i=1}^m U^{(p_i)},\quad V=\bigcup_{i=1}^m V_{p_i},$$

那末，U 与 V 都是空间 X 的开集，并且

$$U\supset F,\quad V\supset G,\quad U\cap V=\emptyset.$$

所以 X 是一个正规空间．】

由吉洪诺夫定理的系(4.2.2)与定理(2.6)立即得到

(2.8) **系** 任意一族紧致豪斯道夫空间的积空间是一个 T_4 空间．

3* 覆盖的可收缩性 我们现在去定义"覆盖的可收缩性"，并证明关于正规空间开覆盖可收缩的定理．

(2.9) **定义** 令 X 为一个随意给定的拓扑空间，并令 $\mathbf{C}_u=\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 为空间 X 的一个开覆盖．如果 $\forall\alpha\in A$，$\exists X$ 的一个开集 V_α，s. t. $\overline{V}_\alpha\subset U_\alpha$，并且 s. t. $\mathbf{C}_v^*=\{V_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 仍然是空间 X 的一个开覆盖，那末，我们就说，覆盖 $\mathbf{C}_u$ 被收缩到了 $\mathbf{C}_u^*$，或者说，覆盖 $\mathbf{C}_u$ 是可收缩的．

(2.10) **定理** 如果$C_u=\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$是正规空间$X$的一个开覆盖，又$X$的每个点只能属于有限多个$U_\alpha$，那末，$C_u$必然是可收缩的。

证 令φ为以标号集A为定义域的一个函数，其定义如下：

a) $\forall\alpha\in A$，$\varphi(\alpha)=U_\alpha$，否则$\varphi(\alpha)=V_\alpha$，s. t. $\overline{V}_\alpha\subset U_\alpha$；

b) $\{\varphi(\alpha)\}_{\alpha\in A}$是空间$X$的一个开覆盖。

以Φ表示一切这样的函数φ组成的集合：$\Phi=\{\varphi\}$。设$\varphi\in\Phi$，$\varphi'\in\Phi$，并定义$\varphi\leqslant\varphi'$如次：$\varphi\leqslant\varphi'\Leftrightarrow\forall\alpha\in A$，s. t. $\varphi(\alpha)=V_\alpha$，总有$\varphi'(\alpha)=\varphi(\alpha)$。不难看出，二元关系$\leqslant$是集合$\Phi$中的一个偏序关系。事实上，设$\varphi\leqslant\varphi'\wedge\varphi'\leqslant\varphi$。那末，$\forall\alpha\in A$，s. t. $\varphi(\alpha)=V_\alpha$，总有$\varphi'(\alpha)=\varphi(\alpha)$，又$\forall\alpha\in A$，s. t. $\varphi'(\alpha)=V_\alpha$，总有$\varphi(\alpha)=\varphi'(\alpha)$。由此可见，$\forall\alpha\in A$，总有$\varphi(\alpha)=\varphi'(\alpha)$。于是

$$\varphi\leqslant\varphi'\wedge\varphi'\leqslant\varphi\Rightarrow\varphi=\varphi'.$$

再设$\varphi\leqslant\varphi'\wedge\varphi'\leqslant\varphi''$。那末，$\forall\alpha\in A$，s. t. $\varphi(\alpha)=V_\alpha$总有$\varphi'(\alpha)=\varphi(\alpha)=V_\alpha$，又$\forall\alpha\in A$，s. t. $\varphi'(\alpha)=V_\alpha$，总有$\varphi''(\alpha)=\varphi'(\alpha)=V_\alpha$。由此可见，

$$\forall\alpha\in A,\ \text{s. t. } \varphi(\alpha)=V_\alpha,$$

总有$\varphi''(\alpha)=\varphi(\alpha)$。于是，

$$\varphi\leqslant\varphi'\wedge\varphi'\leqslant\varphi''\Rightarrow\varphi\leqslant\varphi''.$$

因此，$(\Phi,\ \leqslant)$是一个偏序集。

现在要去证明的是，Φ是一个归纳集。令$\Phi'=\{\varphi'\}$为Φ的一个随意全序子集，并令

$$\varphi''(\alpha)=\bigcap\nolimits_{\varphi'\in\Phi'}\varphi'(\alpha).$$

显而易见，如果$\forall\varphi'\in\Phi'$总有$\varphi'(\alpha)=U_\alpha$，则$\varphi''(\alpha)=U_\alpha$，否则$\varphi''(\alpha)=V_\alpha$。令$x$为空间$X$的任意一点，并令$U_{\alpha_1}$, U_{α_2}, $\cdots$, U_{α_n}为属于C_u而且包含点x的所有集合。对于任一$\alpha_i(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$或者总有$\varphi'(\alpha_i)=U_{\alpha_i}$而不论$\varphi'$是$\Phi'$的什么元素，或者$\exists\varphi'_j\in\Phi'$，s. t. $\varphi'_j(\alpha_i)=V_{\alpha_i}$。在后一情形下，$\forall\varphi'\geqslant\varphi'_j$，我们总有$\varphi'(\alpha_i)=\varphi'_j(\alpha_i)=V_{\alpha_i}$。既然$U_{\alpha_i}$的个数是有限的，又既然$\Phi'$是全序的，那就一定

$$\exists\varphi'_0\in\Phi'\ni\cdot\varphi'_0(\alpha_i)=\varphi''(\alpha_i)=U_{\alpha_i}\vee=V_{\alpha_i}.$$

因为$\{\varphi'_0(\alpha)\}_{\alpha\in A}$是$X$的一个覆盖，所以$\exists\alpha_i$, s. t. $x\in\varphi'_0(\alpha_i)=\varphi''(\alpha_i)$。因此，$\{\varphi''(\alpha)\}_{\alpha\in A}$也是$X$的一个覆盖。因为$\varphi''$满足条件a)及b)，所以$\varphi''\in\Phi$，并且$\forall\varphi'\in\Phi'$，总有$\varphi'\leqslant\varphi''$。换句话说，$\varphi''$是$\Phi'$的一个上界。这就证明了$\Phi$是一个归纳集①。

---

① $\Phi\neq\emptyset$是显而易见的，因为Φ至少包含了如下的函数φ：$\forall\alpha\in A$，$\varphi(\alpha)=U_\alpha$。

于是根据卓伦引理(0.6.10)，Φ 包含一个极大元 φ_1.

剩下要去证明的是，$\forall\alpha\in A$ 总有 $\varphi_1(\alpha)=V_\alpha$.

假定恰恰相反，$\exists\beta\in A\ni\cdot\varphi_1(\beta)=U_\beta$. 令

$$F=\mathscr{C}\bigcup_{\alpha\neq\beta}\varphi_1(\alpha).$$

显而易见，F 是空间 X 的闭集，并且 $F\subset U_\beta$. 由于空间 X 是正规的，我们从定理(2.5)看出，$\exists X$ 的一个开集 V_β 如下：

$$V_\beta\supset F\ni\cdot\overline{V}_\beta\subset U_\beta.$$

既然

$$\mathscr{C}\bigcup_{\alpha\neq\beta}\varphi_1(\alpha)\subset V_\beta.$$

可见 $\{V_\beta,\ \varphi_1(\alpha)\}_{\substack{\alpha\neq\beta\\ \alpha\in A}}$ 是空间 X 的一个开覆盖。令 φ_2 为定义在 A 上的一个函数，s. t. $\forall\alpha\neq\beta$, $\varphi_2(\alpha)=\varphi_1(\alpha)$, 而 $\varphi_2(\beta)=V_\beta$. 于是我们看出，$\varphi_2\neq\varphi_1$, 但 $\varphi_2\geqslant\varphi_1$. 这与 φ_1 是极大元这一事实矛盾. 因此，

$$\sim\cdot\exists\beta\in A\ni\cdot\varphi_1(\beta)=U_\beta,$$

即 $\forall\alpha\in A$ 总有 $\varphi_1(\alpha)=V_\alpha$. ▌

下面的命题是定理(2.10)的特例.

(2.11) **系** 正规空间的每个有限开覆盖都是可收缩的.

(2.12) **定理** 如果 $\{F_i\}$ 是正规空间 X 的闭集的一个有限族，则 $\forall F_i$ 总 $\exists$ 开集 $U_i\supset F_i\ni\cdot F_i\cap\cdots\cap F_j=\emptyset\Leftrightarrow U_i\cap\cdots\cap U_j=\emptyset$.

证 设 $\{F_i\}$ 是闭集的一个有限族 s. t. $\bigcap_i F_i=\emptyset$. 那末，$\{\mathscr{C}F_i\}$ 就是空间 X 的一个有限开覆盖. 因此根据 (2.11)，$\forall i$, $\exists$ 开集 W_i s. t. $\overline{W}_i\subset\mathscr{C}F_i$, 而且 $\{W_i\}$ 仍然是 X 的一个开覆盖。令 $U_i=\mathscr{C}\overline{W}_i$; 则 U_i 是开集，$F_i\subset U_i$, 并且 $\bigcap_i U_i=\emptyset$.

至于一般情形，我们取出所有的集合 $\alpha=\{\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_n\}$, 其中 α_k 是闭集 F_{α_k} 的标号，而且 F_{α_k} 适合条件 $\bigcap_{k=1}^n F_{\alpha_k}=\emptyset$. 根据刚才得到的结果，$\forall\alpha$ 及 F_{α_k}, 总 $\exists$ 开集 $U^\alpha_{\alpha_k}$ s. t. $F_{\alpha_k}\subset U^\alpha_{\alpha_k}$, 并且 s. t. $\bigcap_{k=1}^n U^\alpha_{\alpha_k}=\emptyset$. $\forall i$, 令 $A_i=\{\alpha|i\in\alpha\}$, 并令 $U_i=\bigcap_{\alpha\in A_i}U^\alpha_i$. 于是显而易见，$F_i\subset U_i$, 而且 U_i 是开集. 如果 $F_i\cap\cdots\cap F_j=\emptyset$, 则必有

$$\alpha'\in A_i\cap\cdots\cap A_j\wedge\alpha'=\{i,\ \cdots,\ j\}.$$

于是我们有

$$U_i\cap\cdots\cap U_j=(\bigcap_{\alpha\in A_i}U^\alpha_i)\cap\cdots\cap(\bigcap_{\alpha\in A_j}U^\alpha_j)=(U^{\alpha'}_i\cap\cdots\cap U^{\alpha'}_j)\cap\cdots=\emptyset.$$

最后，因为 $\forall i$, $F_i\subset U_i$, 所以

$$U_i\cap\cdots\cap U_j=\emptyset\Rightarrow F_i\cap\cdots\cap F_j=\emptyset. \ ▌$$

三、正规空间上的连续实值函数

在这一节里，我们将要证明关于正规空间的两个非常重要的定理，这就是乌里松引理和铁策开拓定理. 从这两个定理我们将会看出，空间的正规性与非常数的连续实值函数的存在有着密切的联系，而前者甚至可用后者来刻划.

让我们首先来证明乌里松引理.

(3.1) **乌里松引理** 如果 X 是一个正规空间，又 F 与 G 是空间 X 中任意两个不相交的闭集，那末，必然 $\exists X$ 上的一个连续实值函数 f, s. t. $\forall x\in F$ 总有 $f(x)=0$, $\forall x\in G$ 总有 $f(x)=1$, 又 $\forall x\in X$ 总有

$$0\leqslant f(x)\leqslant 1.$$

证 对于任一二进分数 $t(0<t\leqslant 1)$，我们指定空间 X 的一个开集 U_t 与它相应，使得下面三个条件满足：

1) $F\subset U_t$;

2) $G\cap\overline{U}_t=\emptyset$;

3) $t<t'\Rightarrow\overline{U}_t\subset U_{t'}$.

我们现在用归纳构造法去构作这些开集.

根据定理(2.5)，$\exists$ 开集 U_1, s. t. $F\subset U_1\wedge\overline{U}_1\cap G=\emptyset$. 假定当 $t=\frac{k}{2^p}$, $p<n$, $0<t\leqslant 1$ 时，所有的开集 U_t 都已经求得并且满足上述三个条件. 任取一个二进分数 $\frac{2\lambda+1}{2^n}$，我们希望构作满足上述三个条件的一个开集，并用二进分数 $\frac{2\lambda+1}{2^n}$ 去标示它. 既然[①]

① 为了方便计，可令 $U_0=F$. 如此，当 $\lambda=0$ 时，$U_{\frac{\lambda}{2^{n-1}}}$ 为一闭集，即 F.

$$\frac{\lambda}{2^{n-1}}<\frac{2\lambda+1}{2^n}<\frac{\lambda+1}{2^{n-1}}, \quad (0\leqslant\lambda\leqslant 2^{n-1}-1)$$

根据归纳法假设，就应该有开集 $U_{\frac{\lambda}{2^{n-1}}}$ 与 $U_{\frac{\lambda+1}{2^{n-1}}}$, s. t. $\overline{U}_{\frac{\lambda}{2^{n-1}}}\subset U_{\frac{\lambda+1}{2^{n-1}}}$. 于是从定理(2.5)看出，$\exists X$ 的一个开集 V, s. t.

$$\overline{U}_{\frac{\lambda}{2^{n-1}}}\subset V\wedge\overline{V}\subset U_{\frac{\lambda+1}{2^{n-1}}}.$$

令
$$U_{\frac{2\lambda+1}{2^n}}=V.$$

我们现在去证明，对于刚才得到的 $U_{\frac{2\lambda+1}{2^n}}$, 上面所说的三个条件都满足. 事实上，条件 1)和 2)显然满足. 为了核对条件 3)，我们任意取一个二进分数 t', s. t.

$$t=\frac{2\lambda+1}{2^n}<t',$$

并且 t' 的分母的指数不超过 n. 于是下面两种情形中有一种而且也只有一种发生：

1° $t'=\frac{k}{2^p}$, $p<n$. 在这一情形下，$t'=\frac{2^{n-p}k}{2^n}$. 因此，

$$2\lambda+2\leqslant 2^{n-p}k.$$

由此可见，$\frac{2\lambda+2}{2^n}\leqslant\frac{2^{n-p}k}{2^n}$, 亦即 $\frac{\lambda+1}{2^{n-1}}\leqslant t'$,

所以我们有
$$U_{\frac{\lambda+1}{2^{n-1}}}\subset U_{t'}.$$

由于 $\overline{U}_t\subset U_{\frac{\lambda+1}{2^{n-1}}}$, 我们有 $\overline{U}_t\subset U_{t'}$.

2° $t'=\frac{2\mu+1}{2^n}$. 在这一情形下，必然有 $\mu>\lambda$; 于是

$$\frac{\lambda+1}{2^{n-1}}\leqslant\frac{\mu}{2^{n-1}}.$$

由此可见
$$\overline{U}_t\subset U_{\frac{\lambda+1}{2^{n-1}}}\subset U_{\frac{\mu}{2^{n-1}}}\subset\overline{U}_{\frac{\mu}{2^{n-1}}}\subset U_{\frac{2\mu+1}{2^n}},$$

亦即
$$\overline{U}_t\subset U_{t'}.$$

现在假设

$$t=\frac{2\lambda}{2^n},\quad t'=\frac{2\mu+1}{2^n},\quad t<t'.$$

因为在这一情形下必须有 $\mu\geqslant\lambda$，所以从归纳法假设看出，

$$\overline{U}_t\subset\overline{U}_{\frac{2\mu}{2^n}}.$$

但是根据上面 $U_{t'}$ 的定义，

$$\overline{U}_{\frac{2\mu}{2^n}}\subset U_{\frac{2\mu+1}{2^n}}=U_{t'}.$$

因此我们仍然得到 $\overline{U}_t\subset U_{t'}$.

综合以上各种情形，我们看到，条件 3)也满足．于是我们用归纳构造法构作了一族开集 $\{U_t\}_{0<t\leqslant1}$，满足条件 1)、2)及 3)，在这里 t 是一个二进分数．

现在让我们定义空间 X 上的实值函数 f 如下：令 x 为空间 X 的随意一点．如果 $x\notin U_1$，则令 $f(x)=1$．如果 $x\in U_1$，则令

$$f(x)=\inf\{t\in]0,1]\,|\,U_t\ni x,\ t\text{ 是一个二进分数}\},$$

于是，当 $x\in F$ 时，则 $\forall\, t(0<t\leqslant1,\ t$ 是一个二进分数)，就恒有 $x\in U_t$，因此 $f(x)=0$．而当 $x\in G$ 时，则因为 $x\notin U_1$，所以

$$f(x)=1.$$

又显然 $\forall\, x\in X$，总有

$$0\leqslant f(x)\leqslant1.$$

我们去证明函数 f 的连续性．为此，我们在空间 X 中任取一点 x，令 $f(x)=\theta(0\leqslant\theta\leqslant1)$，并任取开区间 $]a,b[\ \ni\theta$，而去证明 $f^{-1}(\,]a,b[\,)$必须是空间 X 中点 x 的一个邻域．现在先假定 $0<\theta<1$．于是 $\exists$ 二进分数 t' 与 t''，$\ni\cdot$

$$a<t'<\theta,\quad \theta<t''<b.$$

试看集合 $U_{t''}-\overline{U}_{t'}$．不难断定，$x\in U_{t''}-\overline{U}_{t'}$．事实上，既然

$$f(x)=\theta<t'',$$

从函数 f 的定义就可以看出，$\exists$ 一个二进分数 t_1, s. t.

$$\theta\leqslant t_1<t''\wedge x\in U_{t_1}.$$

但是$\overline{U}_{t_1}\subset U_{t''}$. 可见$x\in U_{t''}$. 取一个随意的二进分数

$$t_1'\ni\cdot t'<t_1'<\theta.$$

既然$t_1'<\theta$, 从θ的定义就可以看出, $x\notin U_{t_1'}$. 因为$\overline{U}_{t'}\subset U_{t_1'}$, 所以$x\notin\overline{U}_{t'}$. 于是使我们证明了$x\in U_{t''}-\overline{U}_{t'}$. 现在任取一个点$x'\in U_{t''}-\overline{U}_{t'}$. 因为$x'\notin U_{t'}$, 所以$f(x')\geqslant t'$. 又因为$x'\in U_{t''}$, 所以$f(x')\leqslant t''$. 这证明了$\forall x'\in U_{t''}-\overline{U}_{t'}$, 总有

$$f(x')\in[t',\ t'']\subset\ ]a,\ b[\ .$$

由此可见,
$$U_{t''}-\overline{U}_{t'}\subset f^{-1}(\ ]a,\ b[\ ).$$

因为$U_{t''}-\overline{U}_{t'}$是包含点$x$而且包含于$f^{-1}(\ ]a,\ b[\ )$的开集, 所以$f^{-1}(\ ]a,\ b[\ )$是点$x$的一个邻域.

其次设$\theta=1$, 并设t为满足不等式$a<t<1$, $t>0$的一个二进分数; 则不难看出

$$x\in\mathscr{C}\overline{U}_t\subset f^{-1}(\ ]a,\ b[\ ).$$

事实上, 如果$x\in\overline{U}_t$, 则可取二进分数t', s. t. $t<t'<1$. 于是由于$\overline{U}_t\subset U_{t'}$, 我们将有$x\in U_{t'}$, 因此, $f(x)=\theta\leqslant t'<1$. 这与所设矛盾. 由此可见, $x\in\mathscr{C}\overline{U}_t$. 现在令$x'$为$\mathscr{C}\overline{U}_t$中任意一点. 那末, $x'\notin U_t$, 因而$t\leqslant f(x')\leqslant 1$. 这证明了

$$\mathscr{C}\overline{U}_t\subset f^{-1}(\ ]a,\ b[\ ).$$

由于$\mathscr{C}\overline{U}_t$开于空间$X$中而且包含点$x$, 可见$f^{-1}(\ ]a,\ b[\ )$是点$x$的一个邻域.

最后设$\theta=0$, 并设t_0是满足不等式$0<t_0<b$, $t_0<1$的一个二进分数. 试看U_{t_0}. 因为$f(x)=0$, 所以对于一切二进分数$t(0<t\leqslant 1)$都有$x\in U_t$; 特别地, $x\in U_{t_0}$. 令$x'\in U_{t_0}$; 则

$$0\leqslant f(x')\leqslant t_0.$$

由此可见,
$$U_{t_0}\subset f^{-1}(\ ]a,\ b[\ ).$$

所以$f^{-1}(\ ]a,\ b[\ )$是点x的一个邻域.

这样一来，我们证明了 f 在空间 X 的任一点 x 处都连续，因此 f 是 X 上的一个连续函数. ▌

(3.2) **定义** 令 A 与 B 为拓扑空间 X 的两个不相交的点集. 如果 f 是空间 X 上的一个连续实值函数，s. t. $f(A)=\{0\}$, $f(B)=\{1\}$，并且 $f(X)\subset[0, 1]$，那么 f 叫做空间 X 上关于点集偶 (A, B) 的**乌里松特征函数**.

乌里松引理(3.1)告诉我们：对于一个随意正规空间的每一对不相交的闭集 F 与 G，总有关于闭集偶 (F, G) 的一个乌里松特征函数. 反之，如果对于拓扑空间 X 的每一对不相交的闭集 F, G 总有一个 X 上关于闭集偶 (F, G) 的乌里松特征函数，那末，因为 f 在 X 上连续，所以

$$U=f^{-1}\left(\left[0, \frac{1}{4}\right[\ \right) \quad 与 \quad V=f^{-1}\left(\ \left]\frac{3}{4}, 1\right]\right)$$

都是空间 X 的开集，并且显而易见，$F\subset U$, $G\subset V$,

$$U\cap V=f^{-1}\left(\left[0, \frac{1}{4}\right[\ \right)\cap f^{-1}\left(\ \left]\frac{3}{4}, 1\right]\right)$$

$$=f^{-1}\left(\left[0, \frac{1}{4}\right[\cap\left]\frac{3}{4}, 1\right]\right)=f^{-1}(\emptyset)=\emptyset.$$

由此可见，空间 X 是正规的. 这样我们就证明了下面的

(3.3) **定理** 拓扑空间 X 是正规的 $\Leftrightarrow\forall X$ 的不相交的闭集偶 (F, G)，$\exists$ 关于 (F, G) 的一个乌里松特征函数.

下面的定理既是定理(3.3)的一个推广，又是它的一个直接推论.

(3.4) **定理** 拓扑空间 X 是正规的 $\Leftrightarrow\forall X$ 的不相交的闭集偶 (F, G) 以及 $\forall$ 实数偶 (a, b), s. t. $a<b$, $\exists$ 空间 X 上的一个连续实值函数 φ, s. t. $\varphi(F)=\{a\}$, $\varphi(G)=\{b\}$，并且

$$\varphi(X)\subset[a, b].$$

证 显而易见，如果 $\forall t\in[0, 1]$，令

$$g(t)=a+(b-a)t,$$

则 g 是区间[0, 1]到区间[a, b]上的一个拓扑映射. 如果 f 是空间 X 上关于闭集偶(F, G)的乌里松特征函数, 则函数 $\varphi=gf$ 是空间 X 上的一个连续函数; 并且由于 $g(0)=a$, $g(1)=b$, 我们有 $\varphi(F)=\{a\}$, $\varphi(G)=\{b\}$, 又显然还有 $\varphi(X)\subset[a, b]$. 反之, 若 φ 为已知, 则 $f=g^{-1}\varphi$ 明显地是关于闭集偶(F, G)的乌里松特征函数. ▌

作为乌里松引理的值得重视的应用, 我们去证明.

(3.5) **铁策开拓定理.** 如果 F 是正规空间 X 的一个非空闭集, 又 f 是 F 上的一个连续实值函数, 则必然存在 f 在空间 X 上的一个连续开拓.

在证明定理(3.5)之前, 我们首先指出下面的事实: 若 $\forall x\in]-1, 1[$, 令

$$\varphi(x)=\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}x,$$

则 φ 显然是开区间 $]-1, 1[$ 到实直线 $\mathbb{R}$ 上的一个拓扑映射. 设 $F\neq\emptyset$ 是拓扑空间 X 的任一点集, 并设 $f^*: F\to\mathbb{R}$ 连续. 令

$$f=\varphi^{-1}f^*.$$

那末, 显然 $f: F\to]-1, 1[$ 连续. 如果 g 是 f 在 X 上的一个连续开拓, 又 $g(X)\subset]-1, 1[$, 则很明显, $g^*=\varphi g$ 是 f^* 在 X 上的一个连续开拓.

基于上面的议论, 我们只须证明下面的引理, 铁策开拓定理(3.5)就证明了.

(3.6) **引理** 如果 F 是正规空间 X 的一个非空闭集, 又 $f: F\to]-1, 1[$ 连续, 则 $\exists f$ 在空间 X 上的一个连续开拓

$$g\ni\cdot g(X)\subset]-1, 1[.$$

证 我们在下面用归纳构造法去确定正规空间 X 上的一序

列连续实值函数，它一致收敛于某一函数，使这个极限函数在非空闭集 F 上与已知的连续函数 f 相合.

首先我们取出三个闭区间: $\left[-1, -\frac{1}{3}\right]$, $\left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right]$, $\left[\frac{1}{3}, 1\right]$. 令

$$F_1=f^{-1}\left(\left[-1, -\frac{1}{3}\right]\right), \quad F_2=f^{-1}\left(\left[\frac{1}{3}, 1\right]\right),$$

于是，由于 f 在闭集 F 上连续，F_1 与 F_2 都闭于空间 X 中，并且

$$F_1\cap F_2=f^{-1}\left(\left[-1, -\frac{1}{3}\right]\cap\left[\frac{1}{3}, 1\right]\right)=f^{-1}(\emptyset)=\emptyset.$$

因为空间 X 是正规的，所以从定理(3.4)推出，$\exists X$ 上的一个连续函数

$$\varphi_1\ni\cdot\varphi_1(F_1)=\left\{-\frac{1}{3}\right\}, \quad \varphi_1(F_2)=\left\{\frac{1}{3}\right\},$$

并且
$$\varphi_1(X)\subset\left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right].$$

$\forall x\in F$, 如果 $x\in F_1$, 则

$$\varphi_1(x)=-\frac{1}{3}, \quad f(x)\in\ \left]-1, -\frac{1}{3}\right];$$

因此
$$-\frac{2}{3}<f(x)-\varphi_1(x)\leqslant 0,$$

可见
$$|f(x)-\varphi_1(x)|<\frac{2}{3}.$$

如果 $x\in F_2$, 则

$$\varphi_1(x)=\frac{1}{3}, \quad f(x)\in\left[\frac{1}{3}, 1\right[,$$

所以我们有 $\quad |f(x)-\varphi_1(x)|=f(x)-\varphi_1(x)<\frac{2}{3}.$

如果 $x\in F-(F_1\cup F_2)$, 则

$$-\frac{1}{3}<f(x)<\frac{1}{3}\wedge-\frac{1}{3}\leqslant\varphi_1(x)\leqslant\frac{1}{3};$$

因此 $$|f(x)-\varphi_1(x)|<\frac{2}{3}.$$

一句话，$\forall x\in F$,

$$|f(x)-\varphi_1(x)|<\frac{2}{3}.$$

假定对于自然数 n，我们已经确定了满足下列条件的、在空间 X 上连续的函数 φ_n:

1° $\forall x\in X$,

$$-1+\left(\frac{2}{3}\right)^n\leqslant\varphi_n(x)\leqslant 1-\left(\frac{2}{3}\right)^n;$$

2° $\forall x\in F$,

$$|f(x)-\varphi_n(x)|<\left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

令 $f_n=f-\varphi_n$. 那末，f_n 在 F 上连续，并且 $\forall x\in F$，总有

$$-\left(\frac{2}{3}\right)^n<f_n(x)<\left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

令 $$F_1^{(n)}=f_n^{-1}\left(\left[-\left(\frac{2}{3}\right)^n,\ -\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n\right]\right),$$

$$F_2^{(n)}=f_n^{-1}\left(\left[\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n,\ \left(\frac{2}{3}\right)^n\right]\right),$$

再引用一次定理(3.4)，我们看到，$\exists X$ 上的连续函数 ψ_n, s. t.

$$\psi_n(F_1^{(n)})=\left\{-\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n\right\},\quad \psi_n(F_2^{(n)})=\left\{\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n\right\},$$

$$\psi_n(X)\subset\left[-\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n,\ \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n\right].$$

令 $\varphi_{n+1}=\varphi_n+\psi_n$. 那末，显然 φ_{n+1} 在 X 上连续，并且 $\forall x\in X$,

$$-1+\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\leqslant\varphi_{n+1}(x)\leqslant 1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1},$$

此外， $$f-\varphi_{n+1}=(f-\varphi_n)-\psi_n=f_n-\psi_n.$$

如果 x 是属于 $F_1^{(n)}$ 的任意点，则因为

$$-\left(\frac{2}{3}\right)^n<f_n(x)\leqslant-\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n,\quad \psi_n(x)=-\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n,$$

所以 $$|f_n(x)-\psi_n(x)|<\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}.$$

如果 x 是属于 $F_2^{(n)}$ 的任意点，则因为

$$\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n\leqslant f_n(x)<\left(\frac{2}{3}\right)^n,\quad \psi_n(x)=\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n,$$

所以仍然有 $$|f_n(x)-\psi_n(x)|<\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}.$$

又如果 $$x\in F-(F_1^{(n)}\coprod F_2^{(n)}),$$

则因为 $$-\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n<f_n(x)<\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n,$$

$$-\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n\leqslant\psi_n(x)\leqslant\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n,$$

所以还是有 $$|f_n(x)-\psi_n(x)|<\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}.$$

于是我们证明了，$\forall x\in F$，总有

$$|f_n(x)-\psi_n(x)|<\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1},$$

即 $$|f(x)-\varphi_{n+1}(x)|<\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}.$$

这样一来，由归纳构造法，我们定义了在 X 上连续的函数的一个序列 $\{\varphi_n\}$, s. t. $\forall n$, 条件 1° 和 2° 满足．此外，显然下面的不等式对于任意的 n 及 $x\in X$ 成立：

3° $|\varphi_{n+1}(x)-\varphi_n(x)|=|\psi_n(x)|\leqslant\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n$.

我们现在去证明，函数列 $\{\varphi_n\}$ 在空间 X 上收敛．为此，由于

$$\begin{aligned}\varphi_n&=\varphi_1+(\varphi_2-\varphi_1)+\cdots+(\varphi_n-\varphi_{n-1})\\&=\varphi_1+\psi_1+\psi_2+\cdots+\psi_{n-1},\end{aligned}$$

我们只须证明函数项级数

$$\varphi_1+\psi_1+\psi_2+\cdots+\psi_n+\cdots$$

在 X 上收敛就行了．但是这个级数的确是收敛的，这是因为 $\forall n$

以及$\forall x\in X$，我们总有

$$|\psi_n(x)|<\left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

设

$$\lim_{n\to\infty}\varphi_n=\varphi,$$

容易看出，函数列$\{\varphi_n\}$在X上一致收敛于函数φ。事实上，$\forall x\in X$，我们总有

$$|\varphi(x)-\varphi_n(x)|\leqslant|\psi_n(x)|+|\psi_{n+1}(x)|+\cdots$$
$$<\left(\frac{2}{3}\right)^n+\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}+\cdots=3\left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

$\forall \varepsilon>0$，若取自然数N，s. t. $3\left(\frac{2}{3}\right)^N<\varepsilon$，则当$n\geqslant N$时，我们有

$$|\varphi(x)-\varphi_n(x)|<\varepsilon,$$

而无论x是空间X中的哪一点。所以函数列$\{\varphi_n\}$在空间X上一致收敛于函数φ。由于每个函数φ_n在空间X上都连续，极限函数φ必然在X上是连续的(见习题(二)IV, 2)。根据条件2°，既然$\forall x\in F$总有

$$\lim_{n\to\infty}\varphi_n(x)=f(x).$$

可见在F上，我们就应该有$\varphi=f$；换言之，$f=\varphi|F$；或者说，φ是f在X上的一个连续开拓。

因为$\forall n\in\mathbb{N}\wedge\forall x\in X$，恒有$-1<\varphi_n(x)<1$，所以达于极限，就必须有$-1\leqslant\varphi(x)\leqslant1$。令$G=\varphi^{-1}(\{-1, 1\})$。那末，显而易见：

1) 由于$\{-1, 1\}$是实直线$\mathbb{R}$的闭集，因而G是空间X的闭集；

2) 如果$x\in F$，则$\varphi(x)=f(x)\neq\pm1$，可见$x\notin G$，因此

$$G\cap F=\emptyset.$$

于是根据乌里松引理，$\exists$空间X上关于闭集偶(G, F)的一个乌

里松特征函数 ψ. 令 $g=\psi\times\varphi$; 那末, g 是空间 X 上的一个连续实值函数. 设 x 是 F 中随意一点. 那末,

$$g(x)=\psi(x)\cdot\varphi(x)=1\cdot f(x)=f(x),$$

可见 g 也是 f 在空间 X 上的一个连续开拓. 现在假定 x 是空间 X 中随意一点; 那末, 因为

$$0\leqslant\psi(x)\leqslant1,\quad -1\leqslant\varphi(x)\leqslant1,$$

所以

$$-1\leqslant g(x)\leqslant1.$$

不难看出, $\sim\cdot\exists\, x\in X$ s. t. $g(x)=-1$.

事实上 $\qquad g(x)=-1\Leftrightarrow\psi(x)=1\wedge\varphi(x)=-1;$

但是 $\qquad \varphi(x)=-1\Rightarrow x\in G\Rightarrow\psi(x)=0.$

同理, $\qquad \sim\cdot\exists\, x\in X$ s. t. $g(x)=1$.

由此可见, $\forall x\in X$, 总有 $-1<g(x)<1$, 亦即

$$g(X)\subset\ ]-1,\ 1[\ .$$

这样一来, g 就是我们所需要的 f 的连续开拓. 】

正如前面所已经指出的, 引理(3.6)既已证明, 铁策开拓定理(3.5)也就证明了. 】

我们在第一章里已经遇到过实直线 $\mathbb{R}$ 的可数无穷次积空间 $\mathbb{R}^{\omega}$(也可以记作 $\mathbb{R}^{\omega}$)我们不妨把它叫做无穷维实空间.

下面的定理是铁策开拓定理的一个直接推论, 同时又是它的一个推广.

(3.7) 如果 F 是正规空间 X 的一个非空闭集, 又 f 是 F 到无穷维实空间 $\mathbb{R}^{\omega}$ 或者 n 维欧氏空间 $\mathbb{R}^{n}$ 内的一个映射①, 则必然存在 f 在空间 X 上的一个连续开拓.

证 令 f_i 表示 f 的第 i 分支函数; 于是根据(1.6.19), 各个 f_i 都是闭集 F 上的连续实值函数. 根据铁策开拓定理(3.5),

---

① 读者想必还记得, 在定义(1.5.5)中"映射"这一术语是用作连续函数的简称的.

$\forall i$, f_i 有一个在空间 X 上的连续开拓 φ_i. 以各个 φ_i 为第 i 分支映射的函数 φ 显然在 X 上连续，并且是 f 在 X 上的一个开拓.】

附言 定理(3.3)告诉我们，乌里松特征函数可以用来刻划空间的正规性. 同样，我们也可以用这种特征函数来刻划一种"正则性"，不过象这样得到的"正则性"较(1.2)中所定义的为强，被称为"完全正则性"，它的定义有如下述：如果对于拓扑空间 X 的每个闭集 F 以及不属于 F 的任意点 x，总存在 X 上关于点集偶 $(\{x\}, F)$ 的一个乌里松特征函数，那末，空间 X 就叫做完全正则的. 显然凡是完全正则的空间必须是正则的. 完全正则的 T_1 空间叫做**吉洪诺夫空间**. 凡是吉洪诺夫空间显然都是 T_3 空间，但不必是 T_4 空间.

四、完全正规空间

如果当一个拓扑空间具有某个性质 P 时，它的每个子空间也具有性质 P，那末，我们就说，性质 P 是有遗传性的. 显而易见，$T_i(i=0, 1, 2, 3)$ 空间都是有遗传性的， 但T_4空间则不然，因为空间的正规性是不具有遗传性的[①]. 因此我们有引入下面的概念的必要.

(4.1) **定义** 如果拓扑空间 X 的每个子空间都是正规的，则 X 叫做一个**完全正规空间**. 完全正规的 T_1 空间叫做 T_5 空间.

由于每个拓扑空间都是它自己的子空间，可见每个完全正规空间都是正规的. 命题(2.4)告诉我们，每个度量空间都是一个 T_4 空间. 但是任何度量空间作为拓扑空间，它的每个子空间都可以度量化. 因此，任何度量空间都是一个 T_5 空间. 又凡是 T_5 空间必然都是 T_i 空间$(i=1, 2, 3, 4)$. 把度量空间的拓扑性质总结起来，我们得到下面的

(4.2) **定理** 每个度量空间都是一个满足公理 A_1 的 T_5 空间.

下面是关于完全正规空间的两个判别准则.

---

① 例子可在关肇直《拓扑空间概论》一书中找到，见该书第 92 页；所引吉洪诺夫的例子用到了超限序数，超出了本书预备知识的范围.

(4.3) **定理** 空间 X 是完全正规的 $\Leftrightarrow$ 对于 X 中任意一对互相隔离的点集 A 与 B，总 $\exists$ 开集 U 与 V, s. t.

$$A\subset U\wedge B\subset V\wedge U\cap V=\emptyset.$$

证 条件是必要的．设 X 是一个完全正规空间．令

$$S=\mathscr{C}(\bar{A}\cap\bar{B}).$$

那末，S 是空间 X 的开集，$S\cap\bar{A}$ 与 $S\cap\bar{B}$ 相对地闭于 S 中，并且

$$(S\cap\bar{A})\cap(S\cap\bar{B})=S\cap(\bar{A}\cap\bar{B})=\emptyset.$$

S 作为 X 的子空间既然是正规的，那就必然 $\exists S$ 的相对开集 U 与 V, s. t.

$$S\cap\bar{A}\subset U\wedge S\cap\bar{B}\subset V\wedge U\cap V=\emptyset.$$

因为 S 开于 X 中，而 U 与 V 又相对地开于 S 中，所以 U 与 V 是空间 X 的开集．再者，显然 $A\subset S\cap\bar{A}$．这是因为，我们有 $A\subset\bar{A}$；又 A 与 B 既然互相隔离，根据(2.1.4)，我们还有

$$A\cap\mathscr{C}S=A\cap(\bar{A}\cap\bar{B})=A\cap\bar{B}=\emptyset.$$

由此可见，$A\subset U$．同理可证，$B\subset V$．这证明了条件是必要的．

条件也是充分的．假定条件满足．令 S 为空间 X 的任意子空间，并令 F_1 与 F_2 是任意两个不相交的、S 的相对闭集．于是 $\exists$ 空间 X 的闭集 F 与 G s. t. $F_1=F\cap S$, $F_2=G\cap S$．因为 $F_1\subset F$，又 F 闭于 X 中，所以

$$\bar{F}_1\subset F.$$

又因为 $\qquad F\cap F_2=F\cap(F_2\cap S)=F_2\cap(F\cap S)=F_1\cap F_2=\emptyset.$

所以 $\qquad \bar{F}_1\cap F_2=\emptyset.$

同理，$\qquad F_1\cap\bar{F}_2=\emptyset.$

因此根据 (2.1.4)，F_1 与 F_2 互相隔离．条件既然满足，那就 $\exists X$ 的开集 U_1 与 U_2 s. t.

$$F_1\subset U_1\wedge F_2\subset U_2\wedge U_1\cap U_2=\emptyset.$$

因此，$\qquad F_1\subset S\cap U_1\wedge F_2\subset S\cap U_2\wedge(S\cap U_1)\cap(S\cap U_2)=\emptyset.$

由此可见，子空间 S 是正规的．因为 S 是 X 的任意子空间，所以空间 X 根据定义(4.1)是完全正规的．】

显然定理(4.3)又可以表述为：

(4.4) 空间 X 是完全正规的 $\Leftrightarrow$ 对于 X 中任意一对互相隔离的点集总存在它们的不相交的邻域．

(4.5) **定理** 空间 X 是完全正规的 $\Leftrightarrow$ 随意给定 X 的两个闭集 A 与 B，总 $\exists$ 不相交的开集 U 与 V s. t.

$$A-B\subset U\wedge B-A\subset V.$$

证 在证明定理(4.5)之前，我们必须指出一个显然的事实而不给予证明，那就是，在任意的拓扑空间里，两个随意点集的交集的闭包总包含于这两个点集的闭包的交集.

现在假定空间 X 是完全正规的，并且假定 A 与 B 是 X 的两个随意闭集. 令

$$G=A-B=A\cap \mathscr{C}B,\quad F=B-A=B\cap \mathscr{C}A,$$

那末，

$$\overline{G}=\overline{A\cap \mathscr{C}B}\subset \overline{A}\cap \overline{\mathscr{C}B}=A\cap \overline{\mathscr{C}B}.$$

如果 x 是属于 F 的任意点，则 x 不属于 A. 因此，$x\notin\overline{G}$. 由此可见，

$$\overline{G}\cap F=\emptyset.$$

同理可证，

$$G\cap\overline{F}=\emptyset.$$

换句话说，F 与 G 是空间 X 中两个互相隔离的点集. 因此从定理(4.3)推出

$$\exists \text{开集}\, U\supset G\wedge\exists\,\text{开集}\, V\supset F\ni\cdot U\cap V=\emptyset.$$

所以条件是必要的.

反之，设条件满足，并设 A 与 B 是空间 X 中任意两个互相隔离的点集；于是我们有

$$A\cap\overline{B}=\overline{A}\cap B=\emptyset.$$

因为
$$A\subset \mathscr{C}\overline{B}\wedge A\subset\overline{A},$$
所以
$$A\subset\overline{A}\cap \mathscr{C}\overline{B}=\overline{A}-\overline{B},$$
同理，
$$B\subset\overline{B}\cap \mathscr{C}\overline{A}=\overline{B}-\overline{A}.$$

既然 $\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 都是空间 X 的闭集，而且定理的条件又满足，可见必然 $\exists$ 开集 U 与 V, s. t.

$$A\subset\overline{A}-\overline{B}\subset U\wedge B\subset \overline{B}-\overline{A}\subset V\wedge U\cap V=\emptyset.$$

于是根据定理(4.3)，我们看到 X 是一个完全正规空间. 因此条件又是充分的. ▌

下面的重要定理属于吉洪诺夫.

(4.6) **定理** 如果正则空间 X 满足公理 A_2，那末，X 必然是完全正规的.

证 设 $\{W_n\}$ 是空间 X 的一个可数基，并设 P 与 Q 是 X 的任意一对互相隔离的点集. 那末，由于

$$P\cap\overline{Q}=\overline{P}\cap Q=\emptyset,$$

我们看出，$$p\in P\Rightarrow p\in \mathscr{C}\overline{Q}.$$
因为 $\mathscr{C}\overline{Q}$ 是点 p 的一个开邻域，所以根据定理(1.5)，$\exists$ 点 p 的一个开邻域 V，$\ni\cdot \overline{V}\subset\mathscr{C}\overline{Q}$。于是 $\overline{V}\cap\overline{Q}=\emptyset$。由于 $p\in V$，而且 $\{W_n\}$ 是 X 的一个基，可见 $\{W_n\}$ 中必须有一个开集 W，s. t. $p\in W\subset V$。显然

$$\overline{W}\cap\overline{Q}=\emptyset.$$

由上所论，可知 $\forall p\in P$，$\{W_n\}$ 中总 $\exists$ 一个开集 W，$\ni\cdot$

$$p\in W\wedge\overline{W}\cap\overline{Q}=\emptyset.$$

令 $\{U_n\}$ 为适合条件

$$\overline{W}_m\cap\overline{Q}=\emptyset$$

的 $\{W_n\}$ 中一切 W_m 所成的类。那末，我们立即看出：

$$P\subset\bigcup_n U_n\wedge\overline{U}_n\cap\overline{Q}=\emptyset.\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

同样，令 $\{V_n\}$ 为适合条件

$$\overline{W}_k\cap\overline{P}=\emptyset$$

的 $\{W_n\}$ 中一切 W_k 所成的类；则我们有

$$Q\subset\bigcup_n V_n\wedge\overline{V}_n\cap\overline{P}=\emptyset.\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

现在令 $G_1=U_1$，$H_1=V_1-\overline{G}_1$；而 $\forall n>1$，

则令 $$G_n=U_n-(\overline{H}_1\cup\overline{H}_2\cup\cdots\cup\overline{H}_{n-1}),\ H_n=V_n-(\overline{G}_1\cup\overline{G}_2\cup\cdots\cup\overline{G}_n),$$
最后，令

$$G=G_1\cup G_2\cup\cdots\cup G_n\cup\cdots,\qquad H=H_1\cup H_2\cup\cdots\cup H_n\cup\cdots.$$

很明显，各个 G_n 与 H_n 都是空间 X 的开集，因此 G 与 H 也都是开集。我们现在去证明：

$$P\subset G\wedge Q\subset H\wedge G\cap H=\emptyset.$$

事实上，设 p 是点集 P 的任意点。于是因为 $\{U_n\}$ 是点集 P 的一个覆盖，所以 $\exists$ 标数 $m\ni\cdot p\in U_m$。但是根据 H_n 的定义，$\forall n$，$H_n\subset V_n$，因此

$$\overline{H}_n\subset\overline{V}_n;$$

于是 $$\overline{H}_n\cap P\subset\overline{V}_n\cap\overline{P}=\emptyset.$$
因为 $p\in P$，$p\in U_m$，所以根据 G_m 的定义我们立即看到 $p\in G_m$。这样一来，我们就证明了 $P\subset G$。同理可证，$Q\subset H$。

要想证明

$$G\cap H=\emptyset,$$

只须证明 $$(k,\ l)\in\mathbf{N}\times\mathbf{N}\Rightarrow G_k\cap H_l=\emptyset$$
就成了。事实上，如果 $k\leqslant l$，则

$$H_l=V_l-(\overline{G}_1\cup\overline{G}_2\cup\cdots\cup\overline{G}_l)\subset V_l-\overline{G}_k\subset V_l-G_k.$$

由此可见 $$G_k\cap H_l=\emptyset.$$

如果 $k>l$，则

$$G_k=U_k-(\overline{H}_1\cup\overline{H}_2\cup\cdots\cup\overline{H}_{k-1})\subset U_k-\overline{H}_l\subset U_k-H_l,$$

所以仍然有 $$G_k\cap H_l=\emptyset.$$

于是，对于 X 中任意一对互相隔离的点集 P 与 Q，总存在 P 的开邻域 G 与 Q 的开邻域 H，s. t. $G\cap H=\emptyset$。因此从定理(4.3)推出，空间 X 是完全正规的。】

下面的命题是吉洪诺夫定理(4.6)的直接推论。

(4.7) 对于满足公理 A_2 的拓扑空间 X，

X 是 T_3 空间 $\Leftrightarrow$ X 是 T_4 空间 $\Leftrightarrow$ X 是 T_5 空间 $\Leftrightarrow$ X 是吉洪诺夫空间。

(4.8) 每个满足公理 A_2 的紧致豪斯道夫空间都是 T_5 空间。

例 5 我们在例(四)6 中已经指出，例(三)4 中所举空间 $(\mathbb{N}, \mathscr{T}^*)$ 是一个紧致 T_1 空间。这个空间显然还满足公理 A_2，因为它一共只有可数无穷多个开集。然而 $(\mathbb{N}, \mathscr{T}^*)$ 甚至不是一个 T_3 空间，因为它连 T_2 空间也不是。

五、度量化定理

在定义(1.3.2)中我们已经给拓扑空间"可度量化"这一概念下过定义，并且通过定理(1.3.4)解决了有限空间可度量化这一简单问题。在上一节里，我们又给出了一般拓扑空间可度量化的必要条件，那就是空间必须满足公理 A_1 且为 T_5 空间［定理(4.2)］。在这一节里，我们将给出满足公理 A_2 的拓扑空间可度量化的必要与充分条件。

本节的主要定理是"乌里松度量化定理"，又称为"乌里松嵌入定理"。为了证明这个定理，我们需要一些预备知识，特别是关于"希尔伯特方体"的知识。

1. 希尔伯特方体 有两个希尔伯特方体，一般称为第一与第

二希尔伯特方体．结果将发现，它们不但是同胚的，甚至可以使之等距．让我们先来定义第一希尔伯特方体．

(5.1) **定义** 令

$$J_1^\omega = [0, 1] \times [0, 1] \times \cdots \times [0, 1] \times \cdots,$$

即以 J_1^ω 表示单位区间 $[0, 1]$ 的可数无穷次积空间，在这里区间 $[0, 1]$ 被看成实直线 $\mathbb{R}$ 的子空间．那末，积空间 J_1^ω 就叫做第一希尔伯特方体或第一基本方体．

下面的命题的真实性是明显的．

(5.2) 第一基本方体 J_1^ω 是一个满足公理 A_2 的连通紧致豪斯道夫空间，因此它也是一个 T_5 空间．

证 从例(三)9、命题(3.4.2)及(3.4.4)推出，J_1^ω 满足公理 A_2；从定理(2.4.2)及(2.2.6)看出，J_1^ω 具有连通性；从定理(4.6.1)及(4.2.1)知道 J_1^ω 是紧致的；又从例(三)5、命题(3.2.2)及(3.2.3)看到 J_1^ω 是一个豪斯道夫空间．至于 J_1^ω 是一个 T_5 空间则直接从命题(4.8)推得．❚

我们现在去证明下面的定理．

(5.3) 第一希尔伯特方体 J_1^ω 可以用下面的度量来度量化：

$$d(x, y) = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x_n - y_n}{n} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}},$$

其中 $x = \{x_n\}$, $y = \{y_n\}$ 是 J_1^ω 中的随意两个点．

证 d 显然是 J_1^ω 上的一个度量．现在设 $\mathscr{T}$ 是 J_1^ω 上的积拓扑，又 $\mathscr{T}_d$ 是由度量 d 所导致的 J_1^ω 上的拓扑．我们去证明：

$$\mathscr{T}_d = \mathscr{T}.$$

在积拓扑 $\mathscr{T}$ 中任取一个元素 U．由于 $\mathscr{T}_d$ 与 $\mathscr{T}$ 都含有元素 $\emptyset$，因此不妨设 $U \neq \emptyset$．$\forall x \in U$，$\exists k \in \mathbb{N}$ 以及 k 个正实数 α_1, α_2, $\cdots$, α_k. s. t.

$$y = \{y_n\} \in J_1^\omega \wedge |y_i - x_i| < \alpha_i \ (i = 1, 2, \cdots, k) \Rightarrow y \in U,$$

令 $\alpha=\min(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k)$. 不难断定: $B\left(x, \frac{\alpha}{k}\right)\subset U$, 这里的 $B\left(x, \frac{\alpha}{k}\right)$ 表示度量空间 (J_1^ω, d) 中以 x 为中心、$\frac{\alpha}{k}$ 为半径的开球. 事实上, 如果 $y\in B\left(x, \frac{\alpha}{k}\right)$, 则

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x_n-y_n}{n}\right)^2<\left(\frac{\alpha}{k}\right)^2.$$

因此 $\forall n\in\mathbb{N}$ 总有

$$\frac{|x_n-y_n|}{n}<\frac{\alpha}{k}.$$

于是, $$n\leqslant k\Rightarrow|x_n-y_n|<\frac{n}{k}\alpha\leqslant\alpha\leqslant\alpha_n\Rightarrow y\in U.$$

这证明了 $$B\left(x, \frac{\alpha}{k}\right)\subset U.$$

所以 $U\in\mathscr{T}_d$. 由此可见, $\mathscr{T}\subset\mathscr{T}_d$.

反之, 设 V 是 $\mathscr{T}_d$ 的任意元素. 那末,

$$\forall x\in V, \exists\alpha>0\ni\cdot B(x, \alpha)\subset V.$$

取 $$k\in\mathbb{N}\ni\cdot\sum_{n=k+1}^{\infty}\frac{1}{n^2}<\frac{\alpha^2}{2},$$

并令

$$U=\left\{y\in J_1^\omega\,\middle|\,|y_1-x_1|<\frac{\alpha}{2}, |y_2-x_2|<\frac{\alpha}{2}, \cdots, |y_k-x_k|<\frac{\alpha}{2}\right\}.$$

显而易见, $U\in\mathscr{T}\wedge x\in U$. 我们现在去证明: $U\subset B(x, \alpha)$. 事实上, 如果 $y\in U$, 则

$$d(x, y)=\left\{\sum_{n=1}^{k}\left(\frac{x_n-y_n}{n}\right)^2+\sum_{n=k+1}^{\infty}\left(\frac{x_n-y_n}{n}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

设正整数 $n\leqslant k$. 那末, 因为

$$|x_n-y_n|<\frac{\alpha}{2},$$

所以 $$\frac{(x_n-y_n)^2}{n^2}<\frac{\alpha^2}{4n^2}.$$

因此,

$$\sum_{n=1}^{k}\left(\frac{x_n-y_n}{n}\right)^2<\frac{\alpha^2}{4}\sum_{n=1}^{k}\frac{1}{n^2}<\frac{\alpha^2}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

$$=\frac{\alpha^2}{4}\cdot\frac{\pi^2}{6}<\frac{\alpha^2}{4}\cdot 2=\frac{\alpha^2}{2},$$

并且
$$\sum_{n=k+1}^{\infty}\left(\frac{x_n-y_n}{n}\right)^2\leqslant\sum_{n=k+1}^{\infty}\frac{1}{n^2}<\frac{\alpha^2}{2}.$$

由此推出,
$$d(x,\ y)<\left(\frac{\alpha^2}{2}+\frac{\alpha^2}{2}\right)^{\frac{1}{2}}=\alpha.$$

因此 $y\in B(x,\ \alpha)$. 这证明了 $U\subset B(x,\ \alpha)\subset V$. 由此可见 $V\in\mathscr{T}$. 所以 $\mathscr{T}_d\subset\mathscr{T}$.

既然 $\mathscr{T}\subset\mathscr{T}_d\wedge\mathscr{T}_d\subset\mathscr{T}$, 那就必然有 $\mathscr{T}_d=\mathscr{T}$. ∎

(5.4) **定义** 令

$$J_2^\omega=\left\{x=\{x_n\}\in\mathbb{R}^\infty\,\middle|\,\forall n\in\mathbb{N},\ 0\leqslant x_n\leqslant\frac{1}{n}\right\},$$

并且在 J_2^ω 上引入以下度量

$$d'(x,\ y)=\left\{\sum_{n=1}^{\infty}(x_n-y_n)^2\right\}^{\frac{1}{2}}$$

那末, 度量空间 $(J_2^\omega,\ d')$ 叫做第二希尔伯特方体或者第二基本方体.

很明显:

(5.5) 第二希尔伯特方体 J_2^ω 是希尔伯特空间 H^ω 的一个度量子空间.

此外, 下面的命题真实:

(5.6) 第一希尔伯特方体 J_1^ω 与第二希尔伯特方体 J_2^ω 是等距的.

证 这是显而易见的. 事实上, 令

$$x=\{x_n\}\in J_1^\omega,$$

并且令
$$\varphi(x)=\left\{\frac{x_n}{n}\right\}=x'\in J_2^\omega,$$

那末，φ 显然是 J_1^ω 到 J_2^ω 内的一个函数. 不但如此，φ 还是一个满函数. 这是因为，

$$\forall x'=\{x_n'\}\in J_2^\omega,$$

若令
$$x_n=nx_n',$$
则
$$x=\{x_n\}\in J_1^\omega,$$
并且
$$\varphi(x)=x'.$$

根据命题(1.5.17)，我们只要证明 φ 是等距映射，那末，φ 也就必然是一个单函数. 为此，令

$$x=\{x_n\}、y=\{y_n\}$$

是 J_1^ω 中任意一对点. 于是因为

$$d'(\varphi(x),\ \varphi(y))=d'(x',\ y')=d'\left(\left\{\frac{x_n}{n}\right\},\ \left\{\frac{y_n}{n}\right\}\right)$$
$$=\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x_n-y_n}{n}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}=d(x,\ y).$$

所以 φ 是 J_1^ω 到 J_2^ω 上的一个等距映射，即 J_1^ω 与 J_2^ω 是等距的. ▮

从定理(1.5.20)立即看出，J_1^ω 与 J_2^ω 同胚：$J_1^\omega\approx J_2^\omega$.

(5.7) **定义** 设 f 是拓扑空间 X 到拓扑空间 Y 内的一个拓扑映射，即 $\exists Y$ 的一个子空间 S, s. t. f 是 X 到 S 上的一个同胚：$X\approx S$. 这时如果我们把空间 X 的每个点 x 与子空间 S 的点 $f(x)$ 等同起来，这就是说，把它们看成同一点，我们就说，拓扑空间 X 被拓扑地嵌入空间 Y 中，或者简单地说成是 X 被嵌入 Y 中. 如果 X 与 Y 都是度量空间，又 f 是 X 到 $S\subset Y$ 上的一个等距映射，$f(X)=S$，那么我们就说，度量空间 X 被等距地嵌入度量空间 Y 中.

显然，当度量空间 X 被等距地嵌入度量空间 Y 中时，它也就被拓扑地嵌入空间 Y 中.

按照定义(5.7)，并根据命题(5.6)，我们可以说：第一希尔伯

特方体 J_1^ω 可以被等距地嵌入希尔伯特空间 H^ω 中. 于是 J_1^ω 与 J_2^ω 无论从拓扑的观点或度量的观点来看，并无实质上的差异：它们具有完全相同的拓扑性质与度量性，而且简直就可以把它们看成是同一个东西.

2. 度量化定理 我们现在可以去证明乌里松度量化定理或嵌入定理了.

(5.8) **乌里松度量化定理** 每个满足公理 A_2 的 T_3 空间都可以被嵌入第一希尔伯特方体 J_1^ω 中，因此凡是满足公理 A_2 的 T_3 空间都可以度量化.

证 设 X 是一个随意给定的满足公理 A_2 的 T_3 空间. 根据命题(4.7)及乌里松引理(3.1)，由于包含于空间 X 的单元集是闭的，我们看出，$\forall x\in X$ 以及 x 的任意开邻域 U，$\exists$ 空间 X 上关于闭集偶($\mathscr{C}U$, $\{x\}$)的一个乌里松特征函数 $f_{x,U}$. 令

$$V_{x,U}=\{y\in X\mid f_{x,U}(y)>0\}.$$

于是显而易见，
$$x\in V_{x,U}\wedge V_{x,U}\subset U.$$
因此，
$$U=\bigcup_{x\in U}V_{x,U}.$$
既然 $V_{x,U}=f_{x,U}^{-1}(]0, 1])$，可见 $V_{x,U}$ 开于空间 X 中，因而$\{V_{x,U}\}$是空间 X 的一个拓扑基. 由于空间 X 满足公理 A_2，根据定理(3.4.7)，我们可以从 $\{V_{x,U}\}$ 取出空间 X 的一个可数基 $\{V_{x_i,U_i}\}_{i\in\mathbf{N}}$. 为了简化记号起见，可令

$$f_i=f_{x_i,U_i},\quad V_i=V_{x_i,U_i}\quad (i=1, 2, 3, \cdots)$$

定义函数 φ 如下：$\forall y\in X$，令

$$\varphi(y)=(f_1(y), f_2(y), \cdots, f_n(y), \cdots).$$

显然 φ 是空间 X 到第一希尔伯特方体 J_1^ω 内的一个函数. 我们想要证明的是，φ 是空间 X 到 J_1^ω 的子空间 $\varphi(X)$ 上的一个同胚.

为此，设 y 与 z 是空间 X 的两个相异的点. 于是 $\exists y$ 的一个

开邻域 U，它不包含点 z. 因为 $\{V_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 是空间 X 的一个基，所以 $\exists n\in\mathbb{N}$, s. t.

$$y\in V_n\wedge V_n\subset U.$$

因此 $z\notin V_n$. 于是 $f_n(y)>0$ 而 $f_n(z)=0$. 由此可见，φ 是一个单函数. 既然 $\forall i\in\mathbb{N}$, f_i 都连续，那么根据定理(1.6.19)，φ 就必须连续. 不难看出，φ^{-1} 还是 J_1^ω 的子空间 $S=\varphi(X)$ 到空间 X 上的连续函数. 事实上，如果令 η 表示 S 的任意一点，并令

$$y\in X\ni\cdot\varphi(y)=\eta,$$

则 $\varphi^{-1}(\eta)=y$. 假定 N_y 是空间 X 中点 y 的任意邻域；需要证明的是，$(\varphi^{-1})^{-1}(N_y)=\varphi(N_y)$ 是点 η 在 J_1^ω 的子空间 S 中的一个邻域. 既然 $\{V_i\}$ 是空间 X 的一个基，而 N_y 又是空间 X 中点 y 的一个邻域，那就一定

$$\exists n\ni\mathbb{N}\ni\cdot y\in V_n\subset N_y.$$

因此，
$$\eta\in\varphi(V_n)\subset\varphi(N_y).$$

但是，
$$\varphi(V_n)=\{\xi=\{\xi_i\}\in S\,|\,\xi_n>0\}.$$

因此 $\varphi(V_n)$ 相对地开于 S 中. 这证明了 φ 是空间 X 到第一希尔伯特方体 J_1^ω 内的一个拓扑映射，于是根据定义(5.7)，X 就被嵌入 J_1^ω 中. 既然根据(5.8) J_1^ω 可度量化，作为它的子空间，X 也就可以度量化. ▌

下面一系列的定理都是乌里松嵌入定理(5.8)的直接推论.

(5.9) 满足公理 A_2 的拓扑空间 X 可度量化 $\Leftrightarrow X$ 是一个 T_3 空间.

(5.10) 凡是满足公理 A_2 的 T_3 空间都可以被嵌入希尔伯特空间 H^ω 中.

(5.11) 凡是满足公理 A_2 的紧致豪斯道夫空间都可以被嵌入希尔伯特空间 H^ω 中，因此也就必然是可度量化的.

在第四章的附言中我们把紧致统定义为紧致度量空间，现在

利用命题(5.11)和(4.5.4)，紧致统(从而连续统)可以离开度量而被介定：

(5.12) 拓扑空间 X 是一个紧致统 $\Leftrightarrow$ X 是一个满足公理 A_2 的紧致豪斯道夫空间.

习　题

1. 如果 p 与 q 是 T_3 空间的两个不同的点，那末，$\exists$ 开集 U 与 V，s. t.
$$p\in U\wedge q\in V\wedge \bar{U}\cap \bar{V}=\emptyset.$$
2. 如果 S 是 T_4 空间 X 的一个连通集，U 是与 S 相交的 X 的一个开集，又如果 S 至少包含两个点，则 $S\cap U$ 是不可数的.
3. 空间之为正则的、正规的与完全正规的都是拓扑性质.
4. 如果 $\{X_n\}$ 是一序列的紧致豪斯道夫空间，又每个空间 X_n 都满足公理 A_2，那末，积空间 $\prod_{n=1}^{\infty}X_n$ 是一个 T_5 空间，并且可以度量化.
5.* 设 X 是由两个点所组成的离散空间，又 Y 是一个紧致统. 那末，函数空间 Y^X 是一个 T_5 空间(关于函数空间 Y^X 的定义请参考习题(四)V*).
6.* 如果空间 X 是紧致的，又 Y 是满足公理 A_2 的 T_3 空间，那末，函数空间 Y^X 可度量化，因此它是一个 T_5 空间.
7. 如果满足公理 A_2 的豪斯道夫空间是局部紧致的，那末，它一定可以度量化，因此它是一个 T_5 空间.
8. 紧致空间可度量化的必要而且充分的条件是，它是满足公理 A_2 的豪斯道夫空间.
9. 对于一个拓扑空间$(X, \mathscr{T})$，下面的两个命题是等价的：
   (a) $(X, \mathscr{T})$能用 X 上的这样一个度量 d 度量化，使得度量空间(X, d)满足公理 B_*.
   (b) $(X, \mathscr{T})$是一个满足公理 A_2 的 T_3 空间.
10. 设(X, d)为一度量空间. X 上 $\exists$ 一个与 d 等价的度量 d'(可能有 $d'=d$) $\ni\cdot(X, d')$满足公理 $B_*\Leftrightarrow$ 度量空间(X, d)是可分的.
11. 如果$(X, \mathscr{T})$是满足公理 A_2 的 T_3 空间，又 $M\subset X$，那末，M 是条件列紧的 $\Leftrightarrow\bar{M}$ 是紧致的.

附　　录

关于势的可比较性的证明

我们引用卓伦引理去证明下面的

定理　对于任意的两个集合 A 与 B，或者 A 与 B 的一个子集等势，或者 B 与 A 的一个子集等势.

证　A 的某些子集 X 到 B 的某些子集 Y 上的所有双一一函数组成的集合我们用记号 Ω 来表示. 设 f 与 f' 是 Ω 的任意两个元素. 我们定义

$$f\leqslant f'\Leftrightarrow f\subset f'.$$

于是$(\Omega, \leqslant)$是一个偏序集. 设 Ω_0 是 Ω 的任一全序子集，并令

$$\varphi=\bigcup_{f\in\Omega_0}f.$$

如果 $\varphi\in\Omega$，则 φ 显然是 Ω_0 的一个上界；因此如果能够证明 φ 是某个集合 $X\subset A$ 到某个集合 $Y\subset B$ 上的一个双一一函数，则偏序集 Ω 就是一个归纳集.

事实上，令

$$X_0=\operatorname{dom}\varphi,\ Y_0=\operatorname{ran}\varphi.\ \forall x\in X_0,$$

设

$$(x, y)\in\varphi\wedge(x, y')\in\varphi.$$

由于 Ω_0 是全序的，因此，$\exists f\in\Omega_0$, s. t.

$$(x, y)\in f\wedge(x, y')\in f,$$

即

$$y=f(x)\wedge y'=f(x).$$

因为 f 是一个函数，所以

$$y=y'.$$

由此可见，φ 是集合 X_0 到集合 Y_0 内的一个函数. 注意

$$Y_0=\operatorname{ran}\varphi,$$

我们看出，这个函数是满的. 现在 $\forall y\in Y_0$，设

$$\varphi(x)=y\wedge\varphi(x')=y.$$

同理，由于 Ω_0 是全序的，$\exists f_0\in\Omega_0$, s. t.

$$f_0(x)=f_0(x')=y.$$

因为 f_0 是一一的，所以

$$x=x'.$$

由此可见，φ 是集合 X_0 到集合 Y_0 上的一个双一一函数，而且

$$X_0 \subset A, \quad Y_0 \subset B.$$

由此可见，偏序集 Ω 是一个归纳集. 于是根据卓伦引理，Ω 含有一个极大元 ψ，它是 A 的某个子集 X^* 到 B 的某个子集 Y^* 上的一个双一一函数. 我们去证明：

$$X^* = A \vee Y^* = B.$$

实际上，假定恰恰相反，

$$X^* \neq A \wedge Y^* \neq B.$$

那末，$$\exists x_0 \in A \ni \cdot x_0 \notin X^* \wedge \exists y_0 \in B \ni \cdot y_0 \notin Y^*.$$

令 $$\psi^* = \psi \cup \{(x_0, y_0)\},$$

那末，$\psi^* \in \Omega$，$\psi \leqslant \psi^*$，又 $\psi \neq \psi^*$. 这样一来，ψ 就不是 Ω 中的极大元了. 这是一个矛盾[①]. ∎

我们已经知道，上述定理可以表述为：任意的两个势(或基数)都可以比较它们的大小；即 $\forall$ 集合偶，(A, B)，

$$\operatorname{card} A \leqslant \operatorname{card} B \vee \operatorname{card} B \leqslant \operatorname{card} A.$$

---

① 这个证明属于 C. Chevalley，来源请参看第一章第八节实直线上的脚注。

索　　引

一　　画

二　　画

三　　画

四　　画

五　画

六　画

九　画

十　画

十一画

十二画

十 三 画

十 四 画

十 八 画